
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01038392 5

INTRODUCTION

A LA

THÉORIE DES FONCTIONS

D'UNE VARIABLE

INTRODUCTION

A LA

THÉORIE DES FONCTIONS

D'UNE VARIABLE

PAR

JULES TANNERY

SOUS-DIRECTEUR DES ÉTUDES SCIENTIFIQUES
A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

DEUXIÈME ÉDITION ENTIÈREMENT REFONDUE

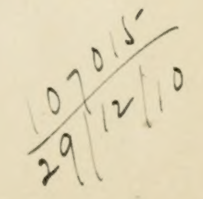
TOME I

NOMBRES IRRATIONNELS, ENSEMBLES, LIMITES, SÉRIES
PRODUITS INFINIS, FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES, DÉRIVÉES

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN
ÉDITEUR, LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORVÈGE
6 ET 12, RUE DE LA SORBONNE, 6 ET 12

—

1904



PRÉFACE

Si la première édition de cette Introduction à la théorie des fonctions d'une variable *a rendu quelques services, je crois que ces services sont aujourd'hui épuisés, pour la meilleure partie, et qu'il aurait été peu utile de la réimprimer, en me bornant à ces corrections et améliorations de détail qui se présentent en foule à l'esprit de quelques auteurs, dès qu'ils ont donné le* bon à tirer *de la dernière feuille de leur livre.*

J'ai donc écrit à nouveau, presque entièrement, cette seconde édition ; j'espère qu'elle sera moins incomplète que la première, et que ce que j'ai cherché à faire y apparaîtra mieux.

Qu'une exposition logique et rigoureuse de l'analyse doive être fondée essentiellement sur l'idée de nombre entier, c'est là sans doute un point qu'on accordera volontiers aujourd'hui ; que, dans le développement de l'analyse, nos intuitions spatiales et nos habitudes géométriques aient tenu un rôle considérable, cela est aussi très certain : non seulement les progrès, mais encore les concepts fondamentaux de l'analyse et de la géométrie sont liés intimement. Les uns ont réagi sur les autres. Les extensions successives de l'idée de nombre ont eu pour but la parfaite adaptation du nombre à la grandeur continue. Lors même qu'on prétend construire l'analyse avec cette idée de nombre, d'une façon purement logique, et qu'on se garde d'y introduire aucun élément étranger, il n'est pas nécessaire de méconnaître ces éléments étrangers, ni tout en parlant des nombres, de feindre qu'on ignore l'espace. Il est légitime, dans une exposition logique de l'analyse, de se servir des termes et des figures de la géométrie, pourvu qu'on sache les traduire dans un langage numérique et déduire logiquement les propriétés numériques qu'illustrent les figures. Cela, à mon avis, est aussi légitime que d'écrire une for-

mule, qui, après tout, est aussi une figure. *De cette façon, l'exposition logique de l'analyse tend à se rapprocher d'une exposition plus élémentaire, où l'on cherche à tirer tout ce qu'on peut de l'intuition spatiale, à voir devant soi pour aller plus vite, sans trop s'inquiéter des fissures qu'on n'aperçoit pas; elle complète et précise cette exposition.*

Je me suis encore efforcé de rendre élémentaire cette Introduction *en ne recherchant point la généralité pour elle-même; j'ai eu hâte d'arriver à ces fonctions spéciales qui, par la simplicité, la beauté et l'importance de leurs propriétés, doivent, à mon avis, retenir longtemps les commençants, avant qu'ils ne s'élèvent dans la région des théorèmes généraux, d'où ces mêmes fonctions n'apparaissent plus que comme d'infimes particularités. Pour la même raison enfin, j'ai renvoyé au second volume l'étude des fonctions d'une variable complexe.*

Si, dans la première édition, je me suis abstenu de tout langage et de toute figure géométriques, c'est que, dans les limites que je m'étais imposées, l'emploi de ce langage ou de ces figures n'aurait guère simplifié les raisonnements, c'est aussi à cause d'une certaine timidité; j'avais peur que le lecteur ne fût pas bien persuadé, s'il voyait une figure, que cette figure n'était qu'une aide et ne cachait point quelque trou, impossible à combler avec les seules ressources de la logique, et, peut-être aussi, avais-je besoin de fortifier en moi-même la conviction que je désirais imprimer dans son esprit. Aujourd'hui, les craintes de cette sorte me semblent un peu puériles; j'ai d'ailleurs l'intention, pour ce qui concerne les éléments de la théorie des fonctions d'une variable complexe, tout en restant dans le domaine du nombre, de profiter des facilités qu'offre le langage géométrique.

Il m'a paru aussi que j'avais été beaucoup trop timide en parlant des ensembles; *je m'étais borné à des indications par trop discrètes, sans mettre suffisamment en lumière le rôle vraiment fondamental que cette notion doit tenir dans une exposition logique de l'analyse; elle est, à ce que je crois, aussi essentielle et plus primitive que celle même de limite, qui lui est d'ailleurs liée étroitement. En dégageant cette notion, en en développant les conséquences, M. G. Cantor a apporté aux mathématiques et à la philosophie des mathématiques une contribution considérable,*

dont l'importance s'accroît par les nombreux travaux qu'elle continue de susciter. Mais quel que soit son intérêt propre, je ne pouvais songer à exposer la théorie des ensembles; je me suis borné à quelques propositions très simples qui lui servent de point de départ et je me suis appuyé franchement sur ces propositions, toutes les fois qu'elles me semblaient constituer un point d'appui naturel. J'ai pu d'ailleurs profiter en cela de l'exemple qu'a donné M. Camille Jordan dans son Cours d'analyse.

C'est parce qu'il se relie directement à la théorie des ensembles que j'ai entièrement adopté le point de départ de M. Dedekind pour l'introduction des nombres irrationnels, en sacrifiant, malgré sa simplicité et sa rigueur, la méthode de M. Méray (¹). *Celui-ci a d'ailleurs donné de cette méthode, au début de ses* Leçons nouvelles d'analyse infinitésimale, *une exposition sur laquelle il n'y a pas à revenir.*

Sauf la notion d'intégrale, le présent volume contient à peu près tout ce qui figurait dans la première édition, c'est-à-dire l'introduction des nombres irrationnels, les propositions d'un caractère fondamental qui concernent les ensembles, les limites, les séries, les fonctions d'une variable en général, les dérivées; enfin la définition et les propriétés les plus simples des fonctions élémentaires. Le second volume se rapportera à quelques points essentiels du calcul intégral et de la théorie des fonctions d'une variable complexe, que je me suis efforcé de préparer dans celui-ci.

Pour qui ce livre est-il écrit?

Il ne suppose, pour être compris, que très peu de connaissances mathématiques. Le plus souvent les choses y sont reprises au début et les démonstrations y sont très détaillées. Les sujets qui y sont traités sont élémentaires, *d'une part parce qu'ils se rattachent aisément aux principes, d'autre part en raison de leur importance pour la suite. Il semble donc fait pour des commençants, et j'ai souvent pensé à eux en l'écrivant. J'aurais entièrement manqué mon but s'il ne pouvait être compris d'un commençant qui serait capable d'appliquer une forte attention à de*

(¹) J'ai eu le tort, dans la première édition, de l'attribuer à E. Heine.

longues déductions abstraites et ne se lasserait point devant des raisonnements qui, parfois, semblent vides en raison de leur généralité, alors qu'il ne peut apercevoir ni le but où tendent ces raisonnements, ni l'économie qui résulte de leur généralité. Mais le plus souvent cette attention et cette patience ne s'acquièrent que par une habitude déjà longue des mathématiques. C'est donc surtout à ceux qui recommencent *l'étude des mathématiques qu'il s'adresse.*

Toute étude approfondie suppose de nombreux retours en arrière. Il me semble que beaucoup d'étudiants, à un moment ou à un autre, doivent sentir l'utilité de ce retour et de ce recommencement, soit parce qu'ils veulent mettre plus d'ordre et de cohésion dans ce qu'ils savent, soit parce qu'ils veulent se débarrasser de l'inquiétude que leur ont laissée quelques raisonnements et qui, peut-être, vient de s'éveiller en eux, soit parce que leurs connaissances sont maintenant assez étendues pour qu'ils sentent qu'une parfaite rigueur est indispensable dans certains sujets qui les attirent. C'est ceux-là que je voudrais contenter et dont je voudrais faciliter le travail.

Il n'y avait guère de bibliographie dans la première édition et elle n'était pas toujours exacte. On en trouvera moins encore cette fois : si je ne me suis pas refusé à écrire le nom d'un mathématicien illustre qui se trouvait sous ma plume, si j'ai indiqué, à l'occasion, une source où j'avais puisé directement, je ne me suis préoccupé, en aucune façon, de faire à chacun sa part : quant à la mienne, il est bien aisé de l'indiquer : je me suis borné à repenser de mon mieux des vérités connues depuis longtemps, à les disposer dans un ordre où elles me paraissent faciles à comprendre.

Ce n'est pas que je méconnaisse l'importance ou l'intérêt de la bibliographie, même dans un livre d'enseignement, où toutefois je ne la crois pas indispensable, en raison du caractère impersonnel que la science y prend naturellement : mais la tentation de renvoyer le lecteur à l'Encyclopédie des mathématiques (1)

(1) *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* (Leipzig B. C. Teubner).

L'édition française de cet important ouvrage, à laquelle M. J. Molk donne tous ses soins, a commencé de paraître. (Paris, Gauthier-Villars).

est trop naturelle pour que je n'y cède pas. La paresse de l'auteur peut ici se couvrir d'excellentes raisons : En vérité, il importe peu de mettre un nom propre sur un théorème ; ce qui importe vraiment, c'est l'ordre dans lequel les vérités ont été découvertes, la façon dont les théories sont nées, se sont développées, se sont enchaînées : c'est précisément ces renseignements, avec l'indication précise des sources, que le lecteur trouvera dans cette Encyclopédie à laquelle je me permets de le renvoyer.

Champéry, le 9 septembre 1904.

JULES TANNERY.

INTRODUCTION A LA THÉORIE

DES

FONCTIONS D'UNE VARIABLE

CHAPITRE PREMIER

—

NOMBRES IRRATIONNELS

I. — INTRODUCTION DES NOMBRES IRRATIONNELS
OPÉRATIONS FONDAMENTALES

1. — L'idée de nombre se forme par une suite de généralisations. Le point de départ est le nombre entier ; les définitions et propositions concernant les quatre opérations fondamentales sur les nombres entiers forment l'objet des premiers chapitres de l'arithmétique ; on introduit ensuite les fractions, qui peuvent être regardées comme des couples de nombres entiers ; les définitions de l'égalité et des opérations fondamentales doivent être reprises sur ces nouveaux nombres ; au début de l'algèbre on introduit une notion nouvelle, celle des nombres affectés de signes ou nombres relatifs ; un tel nombre n'est autre qu'un des nombres définis en arithmétique, précédé du signe + ou du signe — : Ici encore, on doit reprendre à nouveau les définitions de l'égalité et des opérations fondamentales.

Ces extensions successives se justifient à deux points de vue. Au point de vue concret, la définition des fractions (qui embrassent

d'ailleurs les nombres entiers), permet d'exprimer la mesure d'une grandeur commensurable à l'unité; la définition de l'égalité de deux fractions est telle que deux fractions égales mesurent une même grandeur ou des grandeurs égales; la définition de la somme ou de la différence de deux fractions est telle que la somme ou la différence de deux fractions mesure la somme, ou la différence, des deux grandeurs que mesurent ces deux fractions; la définition du produit de deux fractions a, b, dont la première mesure la grandeur A quand on prend la grandeur B pour unité et dont la seconde mesure la grandeur B quand on prend la grandeur C pour unité, est telle que le produit ab mesure la grandeur A quand on prend C pour unité. La définition de la division de deux fractions a, b qui mesurent les grandeurs A, B est telle que le quotient $\frac{a}{b}$ soit la mesure de la grandeur A quand on prend la grandeur B pour unité.

De même, en algèbre, les nombres relatifs s'introduisent naturellement pour mesurer les grandeurs susceptibles d'être comptées dans deux sens opposés, en particulier les vecteurs portés par une même droite, quand on a fait choix, sur cette droite, d'un vecteur *unité*, dont la longueur est l'unité de longueur, dont le sens est le sens des vecteurs positifs de la droite. Les définitions de l'égalité de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division des nombres relatifs sont choisies de manière que les propriétés qu'on vient de rappeler subsistent pour les vecteurs et les nombres relatifs qui leur correspondent; elles se justifient en outre dans d'autres interprétations, en particulier par la généralité des formules relatives au mouvement uniforme, sur une droite.

D'autre part, il importe évidemment de constituer les mathématiques en évitant, dans leur développement, tout appel à l'intuition expérimentale. Que la notion de nombre entier elle-même résulte ou non de l'expérience, c'est là l'objet de discussions purement philosophiques, dans lesquelles je n'ai nullement la prétention d'entrer. Mais l'intérêt qu'il y a à constituer l'analyse avec cette seule notion et celle de l'*infini*, qu'elle implique déjà, est assez évident. Quand on se place à ce point de vue, qui sera ici prédominant, les définitions successives des nombres et des opérations, lors même qu'on n'en oublie pas l'origine expérimentale, doivent être présentées abstraitement; c'est ce qui, comme on

sait, n'offre aucune difficulté sérieuse, pour celles que je viens de rappeler.

On voit alors, d'un côté, que chaque généralisation de la notion de nombre permet de définir des opérations qui n'avaient pas de sens avant cette généralisation, de l'autre, que les propriétés fondamentales des opérations, observées sur les nombres entiers, subsistent pour les nouveaux nombres. Cette *permanence* des propriétés fondamentales justifie les définitions introduites, et l'on peut dire que ces définitions ont été introduites en vue de cette permanence.

Les nombres dont il a été question jusqu'ici sont les nombres *rationnels*; l'ensemble des nombres rationnels est formé par le nombre o, les nombres positifs et négatifs dont la valeur absolue est, soit un nombre entier, soit une fraction à termes entiers. Je suppose acquises les règles relatives au calcul de ces nombres.

Une nouvelle extension de l'idée de nombre concerne les nombres irrationnels : cette extension a sa place en arithmétique : il convient toutefois de la reprendre au début de l'analyse, d'autant que plusieurs des notions et démonstrations que l'on rencontre en analyse, dépendent de la façon dont elle a été présentée.

2. — Avant de l'aborder, je ferai les remarques suivantes.

Étant donné un nombre rationnel positif quelconque, il existe des nombres rationnels positifs plus petits que lui : on les obtient, par exemple, en augmentant le numérateur de la fraction à termes entiers qui le représente ; on peut en obtenir ainsi une *infinité*, c'est-à-dire plus de n, quel que soit n.

Étant donnés deux nombres rationnels quelconques, non égaux, il existe une infinité de nombres rationnels compris entre eux : on obtient l'un quelconque d'entre eux en ajoutant au plus petit des nombres donnés un nombre positif, moindre que leur différence.

Puisqu'il y a des nombres rationnels entre un nombre rationnel donné a et n'importe quel nombre rationnel b plus petit que a ; il ne peut exister, parmi les nombres rationnels plus petits que a, un nombre rationnel b qui soit plus grand que tous les autres ; de même, parmi les nombres rationnels plus grands qu'un nombre rationnel donné, il n'y en a aucun qui soit plus petit que tous les autres.

3. — Soient ε un nombre rationnel positif et A un nombre rationnel quelconque ; la théorie de la division des nombres entiers permet de mettre, et cela d'une seule façon, le nombre $\frac{A}{\varepsilon}$ sous la forme d'un nombre entier n, positif, nul ou négatif, et d'une fraction ε', positive ou nulle, plus petite que 1. Le nombre n est la partie entière de $\frac{A}{\varepsilon}$ et l'on a $n\varepsilon \leqq A < (n+1)\varepsilon$. En d'autres termes encore, si l'on considère la progression indéfinie dans les deux sens [1]

$$\ldots, -3\varepsilon, -2\varepsilon, -\varepsilon, 0, \varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \ldots,$$

ou bien ce nombre A est l'un des termes $n\varepsilon$ de cette suite, ou bien, il tombe entre deux termes consécutifs $n\varepsilon$, $(n+1)\varepsilon$, en désignant par n un nombre entier, positif, nul ou négatif ; $n\varepsilon$ est la valeur approchée par défaut de A, à ε près ; $(n+1)\varepsilon$ est la valeur approchée de A par excès, à ε près. La différence entre A et ses valeurs approchées est moindre en valeur absolue que ε, à moins que sa valeur approchée par défaut ne soit précisément A, auquel cas la différence entre A et sa valeur approchée par excès est ε.

Remarquons, en passant, que la valeur approchée de A, par défaut, est plus grande que A, en valeur absolue, quand A est négatif. Si A est positif et n'est pas égal à sa valeur approchée, par défaut, à ε près, la valeur approchée de — A, à ε près, par défaut, est égale à la valeur approchée de A à ε près, par excès, changée de signe.

4. — Avant d'aller plus loin, plaçons-nous à un point de vue géométrique.

Dans le présent chapitre, on n'aura besoin que d'une droite, qu'on pourra supposer être toujours la même. Les considérations relatives au plan et à l'espace n'interviendront pas.

J'emprunte à la géométrie de la droite les notions, axiomes, définitions ou propositions qui suivent, sans me préoccuper autrement de leur ordre ou de leur dépendance. Les considérations

(1) C'est-à-dire que chaque terme est précédé et suivi d'un autre terme. En parlant simplement d'une suite indéfinie, j'entendrai une suite de termes où il y a un premier terme, et où chaque terme est suivi d'un autre terme ; telle est par exemple la suite des nombres naturels 1, 2, 3.,...

géométriques et les figures ne seront dans ce qui suit que des aides, comme les mots pour la pensée. L'étude des axiomes géométriques est en dehors du sujet auquel j'entends me limiter (¹).

La droite s'étend indéfiniment, de deux côtés, à partir d'un quelconque de ses points. On sait ce qu'on entend en disant qu'un point est entre deux autres. Entre deux points d'une droite il y a un point, et par conséquent une infinité de points, de cette droite. Sur trois points distincts, il y en a un qui est entre les deux autres. Si le point B est entre les points A et C, le point C entre les points B et D, on peut affirmer que C est entre A et D. On sait ce qu'on entend en disant qu'un point est à droite (ou à gauche) d'un autre point. Si le point B est à droite du point A, le point C à droite du point B, on peut affirmer que C est à droite de A. De même pour la gauche. Des points distincts, sur la droite, en nombre fini, peuvent toujours être rangés dans un ordre tel que chacun d'eux soit à droite de ceux qui le précèdent, à gauche de ceux qui le suivent. Relativement aux segments (²), portés par la droite, limités par deux points, on sait ce que c'est que deux segments égaux, qu'un segment plus grand ou plus petit qu'un autre. Si le point B est entre le point A et le point C, le segment AC est plus grand que les segments AB, BC, dont, par définition, il est la somme. Tout segment plus grand qu'un segment donné peut être regardé comme égal à la somme, au sens précédent de ce segment et d'un autre segment. Étant donnés, d'une part, deux segments et, d'autre part, deux autres segments ; si les deux premiers segments sont respectivement égaux aux deux seconds, la somme des deux premiers est égale à la somme des deux seconds; si les deux premiers segments sont respectivement plus grands que les deux seconds, leur somme est plus grande que celle des deux seconds.

En plaçant bout à bout sur une même droite des segments égaux à un segment donné, on arrive toujours, après un nombre fini d'opérations, à former un segment plus grand que tel segment donné à l'avance que l'on voudra. On peut diviser un segment

(¹) On peut, sur ce point, consulter, les *Grundlagen der Geometrie* de M. Hilbert.

(²) Le mot segment n'est pas pris et ne sera pas pris dans le sens de *vecteur* : un segment devient un *vecteur* quand on distingue lequel des points qui le limitent est son *origine*, lequel est son *extrémité*.

donné en autant de parties égales que l'on voudra. On peut le diviser en assez de parties égales pour que l'une d'elles soit plus petite que tel segment donné à l'avance que l'on voudra.

5. — Étant donnés, d'une part, une unité de longueur et, d'autre part, sur la droite indéfinie X'X, un point O que l'on prendra pour *origine* et, sur cette même droite, un sens (de gauche à droite), pour le sens positif, on sait que, à chaque nombre rationnel a, positif ou négatif, correspond un point A de la droite et un seul. Si, en désignant par p et q deux nombres entiers positifs, $\frac{p}{q}$ est la valeur absolue de a, on obtient ce point en divisant l'unité de longueurs en q parties égales et en portant bout à bout, à partir de l'origine O, p de ces parties vers la droite ou vers la gauche, suivant que a est positif ou négatif; si q était égal à 1, les p segments qu'il faudrait placer bout à bout pour obtenir le point A devraient être égaux à l'unité de longueur : a s'appelle l'abscisse du point A; à deux valeurs distinctes du nombre a correspondent deux positions distinctes du point A.

Pour tout point A qu'on peut obtenir par la construction précédente, la longueur OA est *commensurable* à l'unité de longueur; c'est-à-dire qu'il y a un certain segment qui est contenu un nombre exact de fois q dans l'unité et un nombre exact de fois p dans OA ; réciproquement si la longueur OA est commensurable à l'unité de longueur, et si la commune mesure est contenue q fois dans l'unité, p fois dans OA, il est clair qu'il y a un nombre rationnel a, dont la valeur absolue est $\frac{p}{q}$ et dont le signe est $+$ ou $-$ suivant que le point A est à droite ou à gauche de l'origine, qui peut être regardé comme l'abscisse du point A.

Si deux points A, B ont des abscisses rationnelles a, b, B est à droite ou à gauche de A suivant que b est plus grand ou plus petit que a.

6. — Entre deux points quelconques R, S de la droite, il y a des points dont l'abscisse est rationnelle.

On peut en effet diviser l'unité de longueur en q parties égales, plus petites que le segment RS; portant l'une de ces parties sur la droite X'X à partir du point O, vers la droite et vers la gauche,

nous obtiendrons une suite de points (indéfinie dans les deux sens),

$$\ldots\ A'_2,\quad A'_1,\quad O,\quad A_1,\quad A_2, \ldots$$

dont les abscisses seront respectivement

$$\ldots -\frac{2}{q},\quad -\frac{1}{q},\quad 0,\quad \frac{1}{q},\quad \frac{2}{q}, \ldots$$

Pour fixer le langage, supposons, comme dans la figure, que R soit entre O et S et à droite de O. On finira par trouver dans la suite des points O, A_1, A_2, A_3,... un point qui sera au delà (1) de R ; soit A_{n+1} le premier de ces points, en sorte que A_n soit en R ou en

X ——— A'_2 A'_1 O A_1 A_2 A_n R A_{n+1} S ——— X

Fig. 1.

deçà de R ; A_{n+1}, dont l'abscisse est le nombre rationnel $\frac{n+1}{q}$, est entre R et S, car s'il était en S ou au delà de S, le segment A_nA_{n+1} serait, contrairement à l'hypothèse, égal ou supérieur au segment RS. Il résulte de là que, étant donné un point quelconque R de la droite X'X, il existe sur cette droite des points d'abscisse rationnelle aussi rapprochés de R qu'on le voudra, soit au delà, soit en deçà.

7. — Étant donné sur la droite un point A, ou bien la longueur OA est commensurable à l'unité de longueur, ou bien elle est incommensurable à cette unité, c'est-à-dire qu'il n'y a aucun segment qui soit contenu un nombre exact de fois dans cette unité de longueur et dans OA. Dans le premier cas, on a vu que le point A correspondait à une abscisse rationnelle. Supposons qu'on soit dans le second cas.

X' ——— O ——— α A α' ——— X

Fig. 2.

A chaque nombre rationnel correspondra, comme on l'a expliqué plus haut, un point de la droite X'X, autre que le point A, un

(1) J'emploierai les expressions « au delà, en deçà » dans le même sens que « à droite, à gauche ».

point qui sera par conséquent à droite ou à gauche de A ; les nombres rationnels se sépareront donc en deux classes ; à la première classe ou classe inférieure, appartiendront tous les nombres rationnels a auxquels correspondent des points α situés en deçà de A ; à la seconde classe, ou classe supérieure, appartiendront tous les nombres rationnels a' auxquels correspondent des points α' situés à droite de A [1].

Ce mode de séparation des nombres rationnels en deux classes satisfait évidemment aux conditions suivantes :

1° Tout nombre rationnel appartient à l'une ou à l'autre des deux classes.

2° Tout nombre qui appartient à la classe inférieure est plus petit que tout nombre qui appartient à la classe supérieure.

Ces deux premières conditions impliquent la conclusion suivante :

Si un nombre a appartient à la classe inférieure, il en est de même de tout nombre rationnel b qui est plus petit que lui ; en effet, si b n'appartenait pas à la classe inférieure, il appartiendrait à la classe supérieure, donc il serait plus grand que a, contrairement à l'hypothèse. Si un nombre a' appartient à la classe supérieure, il en est de même de tout nombre rationnel b' plus grand que lui.

3° Il n'y a pas dans la classe inférieure de nombre qui soit plus grand que tous les autres. Soit, en effet, a un nombre de la classe inférieure et soit α le point correspondant : α est à gauche de A ; entre α et A, il y a des points dont l'abscisse est un nombre rationnel ; or, un tel point étant en deçà de A, son abscisse appartient à la classe inférieure, et elle est plus grande que a. Il est donc impossible que a soit plus grand que tous les nombres de la classe inférieure. De même, dans la classe supérieure, il n'y a pas de nombre qui soit plus petit que tous les autres nombres de la même classe.

Remarquons encore qu'on peut trouver dans la classe inférieure

[1] Les mots « classe inférieure, classe supérieure » seront continuellement employés dans ce chapitre ; il doit être bien entendu que ces classes ne contiennent que des nombres rationnels ; en sorte que si l'on dit d'un nombre qu'il appartient soit à une classe inférieure, soit à une classe supérieure, il sera inutile de dire que ce nombre est rationnel.

et dans la classe supérieure deux nombres qui diffèrent aussi peu qu'on le veut. En effet, si, en désignant par ε un nombre rationnel positif quelconque, on considère les points dont les abscisses sont les termes de la progression arithmétique, indéfinie dans les deux sens,

$$\ldots,\quad -2\varepsilon,\quad -\varepsilon,\quad 0,\quad \varepsilon,\quad 2\varepsilon,\quad \ldots,$$

le point A tombera nécessairement entre deux consécutifs de ces points dont je désignerai les abscisses par $n\varepsilon$, $(n+1)\varepsilon$; le nombre $n\varepsilon$ appartient à la classe inférieure, le nombre $(n+1)\varepsilon$ à la classe supérieure ; or, leur différence ε peut être supposée aussi petite qu'on le veut.

Je dirai que toute décomposition des nombres rationnels en deux classes qui satisfont aux conditions 1°, 2°, 3° détermine un nombre irrationnel.

8. — A un nombre irrationnel donné, c'est-à-dire, encore une fois, à un mode de décomposition des nombres rationnels en deux classes qui satisfont aux conditions 1°, 2°, 3°, correspond-il sur la droite X'X, un point A qui permette inversement de retrouver, comme on vient de l'expliquer, le même mode de séparation des nombres rationnels en deux classes ?

Concevons, pour avoir une image plus sensible, de colorer en bleu tout point α dont l'abscisse a appartient à la classe inférieure du mode de décomposition donné et tout point qui est à gauche de lui, de colorer en rouge tout point α' dont l'abscisse a' appartient à la classe supérieure, et tout point qui est à droite de lui, enfin d'appeler point blanc tout point qui n'est ni rouge ni bleu.

Par hypothèse, tous les points d'abscisse rationnelle sont colorés.

Il résulte des conditions imposées au mode de décomposition que tout point rouge est au-delà de tout point bleu, que, par suite, la partie bleue et la partie rouge de la droite n'empiètent pas l'une sur l'autre ; on voit en outre qu'un point blanc ne peut se trouver ni à l'intérieur de la partie rouge (puisque, ayant alors des points rouges à sa gauche, il devrait lui-même être rouge), ni à l'intérieur

de la région bleue ; on voit aussi qu'il ne peut y avoir deux points blancs, puisqu'il y aurait entre ces points blancs des points d'abscisse rationnelle, c'est-à-dire des points colorés, des points bleus, par exemple, et que, alors, celui des deux points blancs qui est le plus à gauche devrait être bleu. Il ne peut donc y avoir qu'un seul point blanc A qui sépare la partie bleue et la partie rouge.

L'existence d'un tel point est un postulat conforme à notre intuition de la ligne droite. Il n'y a aucun inconvénient à l'affirmer puisque l'existence de la droite est purement idéale ([1]).

En l'adoptant, on peut dire qu'à chaque point de la droite X'X correspond un nombre rationnel ou irrationnel, *son abscisse*, et que à chaque nombre irrationnel (à chaque mode de décomposition des nombres rationnels en deux classes satisfaisant aux conditions énumérées plus haut) correspond un point de la droite dont ce nombre est l'abscisse. Il est naturel de regarder un nombre irrationnel comme plus grand que tous les nombres rationnels qui figurent dans la classe inférieure qui sert à le définir, comme plus petit que tous les nombres rationnels qui sont dans la classe supérieure ; de regarder un nombre irrationnel comme plus grand qu'un autre nombre irrationnel si le premier est l'abscisse d'un point situé à droite du second, etc.

La correspondance entre les points de la droite X'X et les nombres rationnels ou irrationnels est parfaite : les points peuvent être regardés comme les images des nombres, les nombres comme les signes des points. En raison de cette parfaite correspondance, il est permis de confondre l'image et le signe. C'est ce qui arrivera dans le cours de ce livre.

Pour le moment, laissons toute image de côté, et considérons à titre d'exemple un problème purement numérique.

9. — On montre, en arithmétique, qu'il n'existe pas de nombre

([1]) Il est bien clair que les considérations précédentes ne peuvent s'appliquer à une droite réelle. La subdivision d'un segment de droite réalisé d'une façon quelconque, ne peut être poussée bien loin. La longueur d'un tel segment n'est définie qu'entre certaines limites. L'unité de mesure elle-même, le centimètre, par exemple, ne peut être absolument définie. D'autre part, est-il besoin de dire qu'il est presque déraisonnable de parler d'un point, sans dimensions, qui serait rouge, blanc ou bleu ?

rationnel dont le carré soit égal à 3, mais qu'il existe des nombres rationnels, positifs, dont le carré approche de 3 autant qu'on le veut ; c'est-à-dire que, quelque petit que soit le nombre rationnel positif ε, il y a des nombres rationnels tels que la différence entre leur carré et 3 soit moindre, en valeur absolue, que ε. Il existe de tels nombres dont le carré est inférieur à 3 ; il en existe dont le carré est supérieur à 3.

Puisque le carré d'un nombre rationnel positif n'est jamais égal à 3, il est plus grand que 3 ou plus petit que 3. Rangeons dans une première classe, ou classe inférieure, tous les nombres rationnels négatifs, le nombre o, et tous les nombres rationnels positifs dont le carré est moindre que 3 ; rangeons dans la seconde classe, ou classe supérieure, tous les nombres positifs dont le carré est plus grand que 3. Chaque nombre rationnel a sa place dans l'une ou l'autre des deux classes ; tout nombre de la classe inférieure est plus petit que tout nombre de la classe supérieure. C'est les conditions 1° et 2° du n° **7** ; dans la classe inférieure, il n'y a pas de nombre a plus grand que tous les autres ; en effet, dire que le nombre positif a appartient à la classe inférieure, c'est dire que a^2 est plus petit que 3 et il y a dans la même classe un nombre positif a' tel que $3 - a'^2$ soit moindre que $3 - a^2$, ce qui suppose $a' > a$; de même, il n'y a pas dans la classe supérieure de nombre qui soit plus petit que tous les autres. C'est la condition 3° du même numéro.

On a ainsi défini un mode de décomposition des nombres rationnels en deux classes satisfaisant aux conditions 1°, 2°, 3°, on a défini le nombre irrationnel $\sqrt{3}$. Remarquons qu'on n'a en aucune façon le droit de dire actuellement que le carré de ce nombre est égal à 3 ; les mots « carré d'un nombre irrationnel » n'ont actuellement aucun sens.

10. — Concevons un mode de décomposition des nombres rationnels en deux classes tel que tout nombre rationnel figure nécessairement dans une des classes et dans une seule, tel en outre que tout nombre de la première classe, ou classe inférieure, soit plus petit que tout nombre de la seconde classe ou classe supérieure. Logiquement, quatre cas semblent possibles.

Ou bien il n'y a pas dans la classe inférieure de nombre plus grand que tous les autres et il n'y a pas, dans la classe supérieure

de nombre plus petit que tous les autres : c'est ce qui est arrivé dans l'exemple précédent.

Ou bien, il y a, dans la classe inférieure, un nombre plus grand que tous les autres et il n'y a pas, dans la classe supérieure, de nombre plus petit que tous les autres. C'est ce qui arriverait si, par exemple, on plaçait dans la classe inférieure le nombre 5 et tous les nombres rationnels plus petits que 5, dans la classe supérieure tous les nombres rationnels plus grands que 5.

Ou bien il n'y a pas, dans la classe inférieure, un nombre plus grand que tous les autres et il y a dans la classe supérieure un nombre plus petit que tous les autres. Par exemple, la classe inférieure est formée des nombres rationnels plus petits que 5, la classe supérieure du nombre 5 et des nombres rationnels plus grands.

Ou bien il y a dans la classe inférieure un nombre a plus grand que tous les autres (de la même classe) et dans la classe supérieure un nombre b plus petit que tous les autres ; mais cette dernière supposition doit être rejetée ; en effet, le nombre rationnel a, appartenant à la classe inférieure, serait plus petit que le nombre b de la classe supérieure ; les nombres rationnels compris entre a et b n'auraient été rangés dans aucune des deux classes, puisque, étant plus grands que a, ils ne peuvent appartenir à la classe inférieure et que, étant plus petits que b, ils ne peuvent appartenir à la classe supérieure.

Dans le premier cas le mode de décomposition considéré définit un nombre irrationnel A ; ce nombre est dit plus grand que les nombres de la classe inférieure, plus petit que les nombres de la classe supérieure. Il serait légitime, dès à présent, d'appeler les nombres de la classe inférieure « les nombres rationnels plus petits que A » et les nombres de la classe supérieure « les nombres rationnels plus grands que A ». Je continuerai, pendant quelque temps, de dire un nombre de la classe inférieure relative à A ou un nombre de la classe supérieure relative à A, au lieu de dire un nombre rationnel plus grand, ou plus petit que A, afin que le lecteur se rappelle bien que ce n'est pas le nombre irrationnel A qui sert à définir les nombres rationnels plus petits ou plus grands que lui, que c'est au contraire ces nombres rationnels, ou plutôt la façon dont ils sont rangés dans les deux classes, qui définissent le nombre irrationnel A.

Dans le second et dans le troisième cas, je dirai que le mode de décomposition considéré définit le nombre *rationnel* A qui, dans le second cas, appartient à la classe inférieure et est plus grand que tous les autres nombres de cette classe, qui, dans le troisième cas, appartient à la classe supérieure et est plus petit que tous les autres nombres de cette classe. Pour l'uniformité du langage, je remplacerai ces deux modes de décomposition par un mode unique qui consistera à séparer tous les nombres rationnels en trois classes dont l'une contiendra le seul nombre rationnel A, dont les deux autres seront formées, l'une, la classe inférieure relative au nombre A, par les nombres rationnels plus petits que A, l'autre, la classe supérieure relative au nombre A, par les nombres rationnels plus grands que A ; dans la classe inférieure aucun nombre n'est plus grand que tous les autres nombres de cette classe ; dans la classe supérieure aucun nombre n'est plus petit que tous les autres nombres de cette classe.

En définitive, on se bornera à considérer deux modes de décomposition des nombres rationnels, l'un en deux classes, qui définit un nombre irrationnel, l'autre en trois classes, qui définit le nombre rationnel unique qui constitue l'une des classes. Ces deux modes de décomposition seront dits respectivement le premier et le second mode. Dans les deux modes, la classe inférieure ne comporte pas de nombre plus grand que les autres, et la classe supérieure de nombre plus petit que les autres. Dans le second mode, on sait déjà (nº 3) qu'il est possible de trouver dans la classe inférieure et dans la classe supérieure des nombres (rationnels) dont la différence est aussi petite qu'on le veut ; on va voir qu'il en est de même pour la décomposition du premier mode.

Considérons une telle décomposition, ou, si l'on veut, un nombre irrationnel A. Soit ε un nombre rationnel positif quelconque et considérons, comme au nº **3**, la progression arithmétique de raison ε, indéfinie dans les deux sens,

$$(1) \qquad \ldots, \quad -2\varepsilon, \quad -\varepsilon, \quad 0, \quad \varepsilon, \quad 2\varepsilon, \ldots$$

Chaque terme de cette progression appartient, soit à la classe inférieure, soit à la classe supérieure ; il y a d'ailleurs, dans cette suite, des termes qui appartiennent à chacune des classes, à la classe supérieure, par exemple, puisqu'il y a dans cette suite des

termes qui dépassent tel nombre (rationnel) de la classe supérieure que l'on voudra.

D'autre part, entre deux termes de cette suite qui appartiennent, le premier à la classe inférieure, le second à la classe supérieure, il n'y a qu'un nombre limité de termes; soit $n\varepsilon$ le plus grand de ceux qui appartiennent à la classe inférieure, n étant un nombre entier, positif, nul ou négatif; $(n+1)\varepsilon$ sera évidemment le plus petit des termes qui appartiennent à la classe supérieure; on dira, comme au n° **3**, que $n\varepsilon$ et $(n+1)\varepsilon$ sont les valeurs approchées de A, à ε près, par défaut, et par excès. La seule différence avec ce qui a été dit au n° **3** est que, ici, le nombre A ne peut coïncider avec sa valeur approchée par défaut. La différence ε entre les nombres $n\varepsilon$ et $(n+1)\varepsilon$ pouvant être supposée aussi petite qu'on le veut, la proposition est démontrée.

11. — Relativement à cette notion de la valeur approchée d'un nombre A à ε près, par défaut ou par excès, il convient de faire la remarque suivante. Soit, en désignant par p un nombre naturel quelconque, $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{p}$; considérons la progression arithmétique, indéfinie dans les deux sens,

$$\text{(II)} \qquad \ldots, -2\varepsilon', -\varepsilon', 0, \varepsilon', 2\varepsilon', \ldots;$$

elle permettra, comme tout à l'heure, de déterminer les valeurs approchées $n'\varepsilon'$, $(n'+1)\varepsilon'$, par défaut et par excès, de A; je dis que l'on a

$$n'\varepsilon' \geqq n\varepsilon, \qquad (n'+1)\varepsilon' \leqq (n+1)\varepsilon.$$

En effet, tous les termes de la suite (I) figurent dans la suite (II); donc le plus grand terme de la suite (I) qui appartienne à la classe inférieure ne peut pas être supérieur au plus grand terme de la suite (II) qui appartient à cette même classe; on a donc bien $n'\varepsilon' \geqq n\varepsilon$; la seconde inégalité se démontre de même. Puisque $n'\varepsilon'$ est certainement plus petit que $(n+1)\varepsilon$, $n'\varepsilon'$ s'obtient en ajoutant à $n\varepsilon$ un nombre rationnel, positif ou nul, moindre que ε. Ces conclusions valent évidemment que le nombre A soit irrationnel ou rationnel.

Ceci s'applique en particulier aux valeurs approchées par défaut et par excès d'un nombre A à $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$,..., $\frac{1}{10^p}$,... près. Convenons d'écrire toujours un nombre décimal donné, ainsi qu'on fait d'ordinaire dans les tables numériques, de façon que la *mantisse* (la partie qui suit la virgule) de ce nombre soit positive. La partie entière sera négative si le nombre est négatif. Alors les valeurs approchées de A, par défaut, à 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ;... formeront, d'après ce qu'on vient de dire, une suite déterminée [1] de nombres décimaux, dont la mantisse comprendra un, deux, trois,... chiffres, et dont chacun s'obtiendra en plaçant un chiffre décimal (qui peut être un zéro) à la droite du précédent ; les termes de cette suite ne vont jamais en décroissant. En ajoutant une unité au dernier chiffre de chaque terme de cette suite, on forme la suite des valeurs approchées de A, par excès, à 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ;... près. Les termes de cette suite, dont chacun est certainement plus grand que n'importe quel terme de la première suite, ne vont jamais en croissant.

On parvient ainsi à la représentation décimale d'un nombre quelconque A, formée au moyen d'une partie entière (positive, nulle ou négative), et d'une infinité de chiffres décimaux, dont chacun est déterminé, dès qu'on se donne le mode de décomposition des nombres rationnels qui définit A ; en s'arrêtant au p^e chiffre, on obtient la valeur approchée de A, à $\frac{1}{10^p}$ près, par défaut ; en augmentant ce chiffre d'une unité, on obtient la valeur approchée de A, à $\frac{1}{10^p}$ près, par excès. On verra plus tard que, inversement, cette suite de chiffres décimaux, si elle est déterminée, détermine à son tour le nombre A.

12. — On ne s'est occupé, jusqu'à présent, que d'un seul nombre irrationnel à la fois : il importe de savoir comparer deux nombres A, B irrationnels ou non.

Deux nombres A, B sont dits égaux (et l'on écrit $A = B$) si les deux décompositions qui les définissent sont les mêmes. Cette façon de parler est évidemment légitime si les deux nombres A,

[1] C'est-à-dire que, à chaque rang, se trouve un nombre déterminé.

B sont rationnels ; elle n'est rien autre chose qu'une définition si les deux nombres sont rationnels ; en vertu de cette définition, un nombre est égal à lui-même et deux nombres égaux à un troisième sont égaux entre eux.

Pour être certain que deux nombres A et B sont égaux, il suffit de savoir que les deux classes inférieures relatives à ces nombres sont identiques (que tout nombre qui appartient à la première appartient à la seconde, et que tout nombre qui appartient à la seconde appartient à la première).

Supposons en effet que ces deux classes inférieures coïncident.

Tout d'abord il est impossible que, des deux nombres A et B, l'un soit irrationnel et l'autre rationnel, c'est-à-dire que l'une des décompositions, celle qui définit A, par exemple, soit du premier mode, et l'autre des décompositions, celle qui définit B, soit du second mode. S'il en était ainsi, en effet, le nombre rationnel B ne pourrait appartenir à la classe inférieure relative à A, qui est la même que la classe inférieure relative à B, formée de nombres rationnels plus petits que B ; il ne pourrait non plus appartenir à la classe supérieure relative à A, sans quoi il y aurait dans cette classe supérieure un nombre a' plus petit que B, et qui, pour cette raison, devrait appartenir à la classe inférieure commune à B et à A.

Si le nombre A est irrationnel, il en est donc de même du nombre B, et les deux classes supérieures, formées de tous les nombres rationnels qui ne figurent pas dans la classe inférieure commune à A et à B sont identiques : les deux décompositions sont les mêmes ; les deux nombres A et B sont égaux.

Si les deux nombres A et B sont rationnels, on voit comme tout à l'heure que B ne peut appartenir ni à la classe inférieure relative à A, ni à la classe supérieure : il reste la supposition que B soit égal à A. Dans tous les cas les deux modes de décomposition qui définissent A et B sont identiques.

Il est à peine utile de dire que l'on pourrait encore affirmer l'égalité des nombres A et B si l'on savait que les deux classes supérieures relatives à ces deux nombres sont identiques.

Enfin on peut encore affirmer cette égalité si l'on sait que tout nombre appartenant à la classe inférieure relative à A se trouve dans la classe inférieure relative à B, et que tout nombre apparte-

nant à la classe supérieure relative à A se trouve dans la classe supérieure relative à B. Car si l'on considère un nombre de la classe inférieure relative à B, il ne peut être dans la classe supérieure relative à A, sans quoi il serait aussi dans la classe supérieure relative à B ; il ne peut être égal à A, car alors un nombre b de la classe inférieure relative à B, mais plus grand que A, appartiendrait à la classe supérieure relative à A, donc encore à la classe supérieure relative à B. Ainsi tout nombre de la classe inférieure relative à B se trouve dans la classe inférieure relative à A ; mais, par hypothèse, tout nombre de la classe inférieure relative à A se trouve dans la classe inférieure relative à B : les deux classes inférieures sont identiques.

13. — Les notions relatives à l'inégalité des nombres rationnels ou irrationnels pourraient être renvoyées après la théorie de l'addition : elles se présentent trop naturellement pour qu'on en retarde l'explication. Observons d'abord que ces notions sont acquises lorsque l'un des deux nombres que l'on veut comparer est rationnel. Les inégalités $a < A$ (ou $A > a$), $A < b$ (ou $b > A$), où l'on suppose que a et b sont rationnels, veulent dire simplement : « a appartient à la classe inférieure, b appartient à la classe supérieure relative au nombre A » : elles impliquent la conclusion $a < b$. On peut donc les réunir en écrivant $a < A < b$. Elles impliquent aussi l'existence de nombres rationnels a', b' tels que l'on ait $a < a' < A < b' < b$.

Soient A et B deux nombres quelconques, non égaux. C'est donc que leurs classes inférieures ne sont pas identiques. Il y a un nombre qui figure dans l'une et non dans l'autre ; par exemple un nombre a qui figure dans la classe inférieure relative à A ($a < A$) et qui ne figure pas dans la classe inférieure relative à B, qui est donc soit B, soit un nombre de la classe supérieure relative à B ; en remplaçant au besoin a par un nombre rationnel plus grand que lui, mais appartenant toujours à la classe inférieure relative à A, on peut se borner à examiner la seconde hypothèse ($a > B$).

Toutes les fois qu'il y aura un nombre rationnel a figurant dans la classe inférieure relative à A ($a < A$) et dans la classe supérieure relative à B ($a > B$), je dirai que A est plus grand que B, ou que B est plus petit que A, et j'écrirai $A > B$, ou $B < A$. Inversement

ces dernières façons de parler ou d'écrire reviennent à affirmer l'existence d'un nombre rationnel a appartenant à la fois à la classe inférieure relative à A ($a < A$) et à la classe supérieure relative à B ($a > B$).

Cette affirmation exclut la supposition $A = B$, puisque les deux classes inférieures relatives à A et à B ne sont pas identiques. Elle exclut aussi la supposition $B > A$, c'est-à-dire l'existence d'un nombre rationnel b tel que l'on ait $B > b$, $b > A$, car les inégalités $b > A$, $A > a$, où b, a sont rationnels, impliquent $b > a$, et les inégalités $a > B$, $B > b$ impliquent $a > b$.

Il est maintenant bien aisé de voir que, si A, B, C sont des nombres quelconques, les deux inégalités $A > B$, $B > C$ entraînent l'inégalité $A > C$. En effet, les deux inégalités $A > B$, $B > C$ impliquent l'existence de nombres rationnels a, b tels que l'on ait

$$A > a > B, \qquad B > b > C.$$

Les inégalités $a > B$, $B > b$, où a et b sont rationnels, entraînent $a > b$; l'inégalité $b > C$ exigera donc que a, plus grand que b qui appartient à la classe supérieure relative à C, appartienne aussi à cette classe ; en d'autres termes, on a $a > C$; enfin les inégalités $A > a$, $a > C$ entraînent $A > C$, d'après la définition même.

Si le lecteur veut bien se reporter un instant à ce qui a été dit sur la correspondance entre les points d'une droite et les nombres, il apercevra de suite que les notions de « plus grand, plus petit » qui ont été indiquées au n° **8** coïncident avec celles qu'on vient de développer.

Un nombre A est dit positif si l'on a $A > 0$. Si A est irrationnel, cela veut dire que le nombre rationnel 0 appartient à la classe inférieure relative à A. Un nombre A est dit négatif si l'on a $A < 0$. Dans la classe inférieure relative à un nombre positif, il y a des nombres positifs. Dans la classe supérieure relative à un nombre négatif, il y a des nombres négatifs.

14. — Aux nombres rationnels $a, b, \ldots$ correspondent des nombres rationnels *symétriques* [1] $-a, -b, \ldots$; et si les premiers sont

[1] L'expression de « nombres symétriques » employée par quelques mathématiciens me paraît préférbale à celle de « nombres égaux et de signes contraires ».

rangés par ordre de grandeur croissante, les seconds sont rangés par ordre de grandeur décroissante. D'après cela, à chaque nombre irrationnel A, on peut faire correspondre un nombre irrationnel A′ de la façon suivante :

La classe inférieure relative à A′ est formée des nombres de la classe supérieure relative à A changés tous de signe ; la classe supérieure relative à A′ est formée des nombres de la classe inférieure relative à A tous changés de signe. Il est clair que les deux classes ainsi définies comprennent tous les nombres rationnels ; sauf ce dernier point, ce qu'on vient de dire s'appliquerait aussi bien à un nombre rationnel. Les deux nombres A, A′, dont chacun se déduit de l'autre de la même façon, sont dits *symétriques* (ou égaux et de signes contraires). Si o figure dans la classe inférieure relative à l'un d'eux, o figure évidemment dans la classe supérieure relative à l'autre ; si l'un est positif, l'autre est négatif ; la valeur absolue des deux nombres est celui des deux qui est positif ; on la désigne par le symbole $|A|$. Deux nombres symétriques ne peuvent être égaux que s'ils sont nuls ; leur valeur absolue est alors o. On convient de représenter par $+A$ le même nombre que A et par $-A$ le nombre symétrique de A ou de $+A$.

15. — Pour définir un nombre irrationnel A, il n'est pas nécessaire de faire intervenir tous les nombres rationnels ; si, par exemple, on a un mode de décomposition de tous les nombres rationnels compris entre les deux nombres rationnels a, b $(a < b)$ en deux classes telles que tout nombre de la première classe soit plus petit que tout nombre de la seconde classe, qu'il n'y ait pas dans la première classe de nombre plus grand que tous les autres et qu'il n'y ait pas dans la seconde classe de nombre plus petit que tous les autres, il suffira d'adjoindre à la première classe ainsi formée a et tous les nombres rationnels plus petits que a, à la seconde classe b et tous les nombres rationnels plus grands que b pour avoir défini un nombre irrationnel au sens du n° **10**. Plus généralement, on conçoit que ce qui importe c'est les nombres rationnels très voisins qui enserrent en quelque sorte le nombre à définir. La généralisation que j'ai en vue exige quelques explications relatives aux *ensembles de nombres*, dont il sera souvent question.

16. — La notion *d'ensemble* est de celles que le lecteur possède déjà. On dit une chose très claire en parlant de l'ensemble des nombres entiers, de l'ensemble des nombres premiers, de l'ensemble des nombres rationnels, de l'ensemble des nombres positifs qui peuvent être représentés par des fractions irréductibles dont le dénominateur est 10 ou une puissance de 10, etc.

Tous les *ensembles* que je viens d'énumérer comprennent un nombre infini d'éléments ; à ce titre, on les appelle des ensembles infinis. C'est surtout à ceux-là que nous aurons affaire. Un ensemble *déterminé* est caractérisé par ceci : si on considère un nombre quelconque, ce nombre appartient ou n'appartient pas à l'ensemble. Soit par exemple l'ensemble des nombres premiers (positifs) ; un nombre a appartiendra à l'ensemble s'il est entier, positif et premier ; dans le cas contraire, il n'appartiendra pas à l'ensemble. Cette détermination résulte souvent d'un caractère commun à tous les nombres de l'ensemble et à ceux-là seulement. On peut aussi bien considérer des ensembles de nombres irrationnels que de nombres rationnels ; c'est, pour le moment, de ces derniers seuls qu'il va être question.

On a défini plus haut un nombre quelconque, rationnel ou non, par l'ensemble des nombres rationnels plus petits que lui, et l'ensemble des nombres rationnels plus grands que lui. A ces deux ensembles, on peut en substituer d'autres analogues.

17. — Soient (E), (E') deux ensembles de nombres rationnels jouissant des propriétés suivantes :

Tout nombre de l'ensemble (E) est plus petit que tout nombre de l'ensemble (E') ; dans l'ensemble (E) il n'y a pas de nombre qui soit plus grand que tous les autres ; dans l'ensemble (E') il n'y a pas de nombre qui soit plus petit que tous les autres. Enfin, si petit que soit le nombre rationnel positif ε, on peut trouver un nombre a dans l'ensemble (E) et un nombre a' dans l'ensemble (E') dont la différence soit moindre que ε, les propriétés appartenaient aux ensembles qui ont servi au n° **10** à définir un nombre irrationnel ; on va montrer qu'elles suffisent pour définir un nombre, qui peut d'ailleurs être rationnel ou irrationnel.

Les classes inférieure et supérieure de ce nombre seront définies par la condition de contenir l'une tous les nombres de (E) et, par

suite, tout nombre rationnel qui est plus petit qu'un nombre de (E), l'autre tous les nombres de (E') et, par suite, tout nombre rationnel plus grand qu'un nombre de (E'); puisqu'il n'y a pas dans (E) de nombre plus grand que tous les autres, on peut dire encore que chaque nombre de la classe inférieure est caractérisé par ce fait qu'il y a dans (E) un nombre plus grand que lui; de même chaque nombre de la classe supérieure est caractérisé par ce fait qu'il y a dans (E') un nombre plus petit que lui. Si aucun nombre rationnel n'échappe à ce classement, en d'autres termes, si tout nombre rationnel est, soit égal ou inférieur à un nombre de (E), soit égal ou supérieur à un nombre de (E'), on a affaire au premier mode de décomposition : on définit un nombre irrationnel. S'il y a un nombre rationnel qui échappe au classement, c'est qu'il est à la fois plus grand que tous les nombres de (E) et plus petit que tous les nombres de (E'), il est donc seul de son espèce, car s'il y avait deux tels nombres rationnels A, B et si l'on avait $A > B$, la différence entre un nombre de (E') (plus grand que A) et un nombre de (E) plus petit que B) serait toujours supérieure à $A - B$, contrairement à la dernière condition imposée aux ensembles (E), (E').

18. — Par exemple, on enseigne, en arithmétique, à trouver les nombres de la forme $\frac{a_n}{10^n}$, où a_n est un entier positif, qui satisfont aux conditions

$$\left(\frac{a_n}{10^n}\right)^2 < 3 < \left(\frac{a_n+1}{10^n}\right)^2;$$

l'ensemble (E) des nombres de la forme $\frac{a_n}{10^n}$, et l'ensemble (E') des nombres de la forme $\frac{a_n+1}{10^n}$, jouissent évidemment des propriétés requises; ils peuvent servir à définir le nombre irrationnel $\sqrt{3}$.

Considérons un symbole comme $3,14159265\ldots$ ou $\bar{7},2817181\ldots$, formé d'un nombre entier positif, nul ou négatif [1] suivi d'une suite indéfinie de chiffres décimaux; cette suite est supposée déterminée,

[1] 3 ou -7 dans les exemples choisis; le signe — est placé, suivant l'usage adopté pour les Tables numériques, au-dessus du nombre entier 7, pour indiquer que, seul, il doit être regardé comme négatif.

c'est-à-dire que le chiffre qui occupe un rang déterminé est déterminé. En s'arrêtant quelque part dans la suite, au quatrième chiffre décimal si l'on veut, on formera un nombre décimal déterminé, ce sera dans le premier exemple le nombre positif, 3,1415, dans le second exemple, le nombre négatif $\bar{7},2817 = 0,2817 - 7 = -6,7183$.

Les nombres décimaux que l'on obtient en limitant la suite quelque part forment un ensemble (E), et les nombres qui se déduisent des précédents en ajoutant une unité à leur dernier chiffre décimal constituent un ensemble (E'); ces deux ensembles satisfont aux conditions requises, sauf dans le cas où, à partir d'un certain rang, les chiffres se trouvent être tous des 0, et celui où, à partir d'un certain rang, les chiffres se trouvent tous être des 9 : dans le premier de ces cas, il y a dans (E) un nombre plus grand que tous les autres, et dans le second, il y a, dans (E'), un nombre plus petit que tous les autres. J'observe en passant que, dans le premier cas, l'ensemble (E), dans le second cas, l'ensemble (E') ne contient qu'un nombre fini de termes distincts. En écartant ces deux cas, les deux ensembles (E), (E'), définissent un nombre A, dont la suite considérée est la représentation décimale, au sens du n° **11**, c'est-à-dire que, si on limite la suite au p^e chiffre décimal, le nombre décimal ainsi obtenu est la valeur approchée de A, par défaut, à $\frac{1}{10^p}$ près. La représentation décimale d'un nombre irrationnel A ne peut se trouver ni dans l'un ni dans l'autre des cas d'exception : bornons-nous, en effet, à considérer le premier et supposons que, dans la représentation décimale du nombre irrationnel A tous les chiffres qui suivent le p^e chiffre décimal soient des zéros. Désignons par a le nombre (rationnel) obtenu en s'arrêtant à ce p^e chiffre ; c'est la valeur approchée de A à $\frac{1}{10^p}$ près, par défaut; ce serait aussi, dans la supposition, la valeur approchée de A à $\frac{1}{10^q}$ près, q étant un nombre entier quelconque plus grand que p. Or, soit a' un nombre rationnel tel que l'on ait $a < a' < A$: il existe un entier n, que l'on peut supposer plus grand que p, pour lequel on aura

$$\frac{1}{10^n} < a' - a ;$$

le nombre a' étant plus petit que A, il en est de même du nombre plus petit $a + \frac{1}{10^n}$: il est dès lors impossible que a soit la valeur approchée de A, par défaut, à $\frac{1}{10^n}$ près.

Quant aux nombres rationnels, on sait, par les éléments de l'arithmétique, que leur représentation décimale, définie comme au nº **11**, peut très bien être limitée, ou, si l'on veut, continuée par un nombre illimité de zéros, mais que, lorsqu'on réduit une fraction ordinaire en fraction décimale, il ne peut arriver que tous les chiffres qui suivent un chiffre déterminé soient des 9.

Excluons donc des symboles que nous avons considérés au début de ce numéro ceux où tous les chiffres qui suivent un chiffre déterminé seraient des 9. On peut dire alors qu'un symbole de l'espèce considérée définit un nombre rationnel ou irrationnel A ; c'est la représentation décimale de ce nombre A.

Les représentations décimales de deux nombres A et B ne peuvent coïncider que si les deux nombres sont égaux ; si, en limitant ces deux représentations décimales au p^e chiffre décimal, la première fournit un nombre plus grand que la seconde, on voit de suite que A est plus grand que B.

J'arrive aux opérations sur les nombres irrationnels.

19. — Soient A et B deux nombres rationnels ou irrationnels. Leur somme A + B est, par définition, un nombre plus grand que la somme de deux nombres rationnels quelconques respectivement plus petits que A et B, et plus petit que la somme de deux nombres rationnels quelconques respectivement plus grands que A et B. On va montrer que cette double condition définit un nombre et un nombre unique.

Considérons en effet l'ensemble (E) des nombres distincts que l'on peut obtenir en ajoutant deux nombres a, b, appartenant respectivement aux classes inférieures relatives à A, B, et l'ensemble (E′) des nombres distincts, que l'on peut obtenir en ajoutant deux nombres rationnels a', b' respectivement plus grands que A, B.

Tous les nombres de (E) et de (E′) sont rationnels. Si le nombre cherché existe, sa classe inférieure doit contenir tous les nombres de (E), sa classe supérieure tous les nombres de (E′) : D'ailleurs

tout nombre de (E) est évidemment plus petit que tout nombre de (E') : dans (E) il n'y a pas de nombre plus grand que tous les autres, puisqu'il y a dans les classes inférieures relatives à A et B des nombres respectivement plus grands que a, b, et qu'il y a donc des nombres dont la somme est plus grande que $a + b$. De même, il n'y a pas dans (E') de nombre plus petit que tous les autres. Enfin, il y a dans (E) et dans (E') des nombres dont la différence est aussi petite qu'on le veut, moindre, par exemple, que le nombre rationnel positif ε ; on peut en effet supposer $a' - a$ et $b' - b$ moindres que $\frac{\varepsilon}{2}$; on aura alors $a' + b' - (a + b) < \varepsilon$.

Les deux ensembles (E), (E') satisfont donc aux conditions que l'on a spécifiées au n° **17** ; ils définissent un nombre irrationnel ou rationnel plus grand que tous les nombres de (E), plus petit que tous les nombres de (E') ; c'est le nombre A + B. Cette définition s'accorde évidemment avec la définition ordinaire quand A et B sont rationnels.

Les ensembles (E), (E') ne sont autres d'ailleurs que les classes inférieure et supérieure relatives à A + B. Considérons en effet l'ensemble (E) et la classe inférieure ; tout nombre de (E) fait partie de cette classe ; je dis que tout nombre m de cette classe est un nombre de (E) : en effet, par définition, ou il est égal à un nombre de (E), ou il est inférieur à un tel nombre, c'est-à-dire à la somme de deux nombres a, b, qui appartiennent aux classes inférieures relatives à A, B : on a alors $m < a + b$, et le nombre m est la somme des deux nombres a et $m - a < b$ qui appartiennent aux classes inférieures relatives à A, B ; donc m est un nombre de (E). La démonstration est la même pour la classe supérieure.

Par exemple, o est la somme de deux nombres symétriques quelconques A, A' ; car o est plus grand que la somme de deux nombres appartenant aux classes inférieures relatives à A, A', somme qui est évidemment négative, de même o est plus petit que la somme de deux nombres appartenant aux classes supérieures relatives à A, A', somme qui est évidemment positive ; o satisfait à la définition de la somme des nombres A, A'.

20. — En vertu des propriétés des nombres rationnels, les ensembles (E), (E') ne dépendent pas de l'ordre des nombres A, B,

on a donc

$$(1) \qquad A + B = B + A.$$

La somme de trois nombres A, B, C s'obtient par définition en faisant la somme S des deux premiers nombres A, B, puis la somme S + C. La classe inférieure relative à ce nombre est formée des nombres obtenus en ajoutant un nombre appartenant à la classe inférieure relative à C et un nombre appartenant à la classe inférieure relative à S ; ce dernier nombre est la somme de deux nombres qui appartiennent respectivement aux classes inférieures relatives à A et à B ; la classe inférieure relative à S + C ou à (A + B) + C est donc formée des nombres qui sont la somme de trois nombres appartenant respectivement aux classes inférieures relatives à A, B, C. De même la classe supérieure relative à (A + B) + C est formée des nombres qui sont la somme de trois nombres qui appartiennent respectivement aux classes supérieures relatives à A, B, C. Ce raisonnement s'étendrait sans peine aux sommes de quatre, cinq,... nombres, formées en ajoutant successivement ces nombres, dans l'ordre où ils sont donnés. La démonstration relative à la somme de trois nombres suffit à montrer que l'on a

$$(2) \qquad (A + B) + C = A + (B + C),$$

puisque les modes de décomposition qui définissent les deux membres sont les mêmes. Les égalités (1) et (2) suffisent, comme on sait, à montrer que dans une somme, on peut intervertir l'ordre des termes, et remplacer tels termes que l'on veut par leur somme effectuée. Au reste, ces propositions résultent directement des propositions analogues relatives à l'addition des nombres rationnels et de ce que la classe inférieure relative à une somme quelconque est formée de nombres qui sont la somme de nombres appartenant respectivement aux classes inférieures relatives à ses termes.

On a

$$(3) \qquad A + 0 = A.$$

En effet, tout nombre qui appartient à la classe inférieure relative à A + 0 étant la somme d'un nombre a appartenant à la classe in-

férieure relative à A et d'un nombre rationnel négatif, est moindre que a et par suite appartient à la classe inférieure à A ; de même tout nombre appartenant à la classe supérieure à A + o appartient à la classe supérieure à A ; les nombres A + o et A sont égaux (n° **12**).

Les égalités (1), (2), (3) expriment les propriétés fondamentales de l'addition.

On a A + B > A ou A + B < A suivant que B est positif ou négatif.

Supposons en effet B > o et soient, en employant de petites lettres pour désigner les nombres rationnels

$$o < b < B, \quad a < A < a', \quad a' - a < b;$$

on peut, d'après ce qui précède, affirmer l'existence de tels nombres rationnels b, a, a' : le nombre a' étant plus petit que $a + b$ est plus petit que A + B et les inégalités $a' < A + B$, $a' > A$ entraînent A + B > A.

21. — La définition de la soustraction est la même que celle qui est habituellement donnée au début de l'algèbre.

La différence entre les deux nombres A, B est un nombre tel qu'en lui ajoutant B on trouve A. Supposons qu'il existe un tel nombre x, on aura $x + B = A$; par suite, $x + B + B'$ est égal à A + B', en désignant par B' le symétrique de B; mais la somme $x + B + B'$ est égale à $x + (B + B') = x + o = x$.

Le nombre cherché, s'il existe, est donc unique et égal à A + B'; réciproquement la somme de A + B' et de B est égale à A + (B' + B), ou à A + o = A. Le nombre cherché existe, il est unique, on l'obtient en ajoutant à A le symétrique B' ou — B de B ; conformément aux conventions de l'algèbre on écrit cette somme A — B.

On a

$$A - B < A, \quad A - B > A, \quad A - B = A$$

suivant que B est positif, négatif ou nul, puisque, suivant les cas, — B est négatif, positif ou nul.

Si A est plus grand que B, C = A — B est positif; car si C était négatif ou nul, B + C ou A serait plus petit que B, ou égal à B, ce qui contredit l'hypothèse.

Réciproquement si $C = A - B$ est positif, A, qui est la somme de B et d'un nombre positif C, est plus grand que B.

Dès lors, on n'a, comme on sait, aucune peine à établir les propositions concernant les inégalités et les combinaisons des inégalités qui ne dépendent que de l'addition ou de la soustraction. Par exemple, si les deux nombres A et B sont compris entre les nombres A′, B′, la différence entre les nombres A, B est moindre en valeur absolue que la différence entre les nombres A′, B′. Si, en particulier, on sait que, quelque petit que soit le nombre positif ε, il existe deux nombres A′, B′, qui comprennent entre eux les nombres A, B, et dont la différence est, en valeur absolue, moindre que ε, on peut affirmer que les nombres A, B sont égaux. Cette proposition, qui est souvent commode pour démontrer l'égalité de deux nombres irrationnels, aurait pu être facilement établie dès le n° **13**, en se bornant au cas où A′, B′, ε sont rationnels.

22. — Soient, sur une droite trois points P, Q, R ; je suppose que Q soit entre P et R. Quand on a pris une unité de longueur, les longueurs des segments PQ, QR, PR sont représentées par des

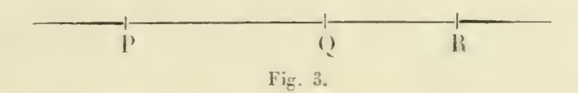


Fig. 3.

nombres (positifs), rationnels ou non, que je désignerai par |PQ|, |QR|, |PR| ; quand les trois segments sont commensurables à l'unité, on sait que l'on a

$$|PR| = |PQ| + |QR|.$$

Il est aisé de voir que cette égalité subsiste dans tous les cas. En effet, le nombre qui mesure un segment est plus grand que tout nombre rationnel qui mesure un segment plus petit que lui et commensurable à l'unité ; il est au contraire plus petit que tout nombre rationnel qui mesure un segment plus grand que lui et commensurable à l'unité. Or, le segment PR est plus grand que la somme de deux segments plus petits respectivement que PQ et QR, plus petit que la somme de deux segments respectivement plus grands que PQ et QR ; donc |PR| est plus grand que la somme de deux nombres rationnels quelconques plus petits respectivement

que [PQ], [QR] et plus petit que la somme de deux nombres rationnels quelconques respectivement plus grands que [PQ], [QR].

Il résulte de là, comme on sait, que, si l'on considère un axe X'X, sur lequel on a pris un sens positif, et si l'on désigne par

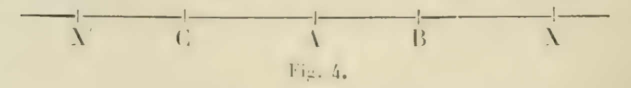


Fig. 4.

$\overline{AB}$ le nombre qui serait l'abscisse du point B si l'on prenait A pour origine, on a, quelle que soit la disposition des points A, B, C,

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}.$$

23. — Les détails dans lesquels je suis entré pour la théorie de l'addition me permettent d'aller un peu plus vite pour la multiplication.

Soient A, B deux nombres *positifs*; le produit AB de ces deux nombres est, par définition, un nombre plus grand que le produit de deux nombres rationnels positifs quelconques respectivement plus petits que A, B et plus petit que le produit de deux nombres rationnels quelconques respectivement plus grands que A, B.

Cette double condition définit un nombre unique. Considérons en effet l'ensemble (E) des nombres distincts que l'on peut obtenir en multipliant deux nombres rationnels positifs a, b respectivement plus petits que A, B, et l'ensemble (E') des nombres rationnels distincts que l'on peut obtenir en multipliant deux nombres a', b' respectivement plus grands que A, B.

Tout nombre de (E) ou de (E') est rationnel. La classe inférieure du nombre cherché, s'il existe, doit contenir tous les nombres de (E); sa classe supérieure, tous les nombres de (E'); tout nombre de (E) est inférieur à tout nombre de (E'); il y a dans E et dans E' des nombres dont la différence est moindre que le nombre rationnel ε; en effet, si l'on a

$$a' = a + \alpha, \qquad b' = b + \beta,$$

on en déduit, en supposant les nombres rationnels et positifs α, β plus petits que le nombre rationnel positif γ, plus petit lui-même que 1,

$$a'b' - ab = a\beta + b\alpha + \alpha\beta < \gamma\,(a + b + 1) < \gamma\,P,$$

où P désigne un nombre rationnel obtenu en ajoutant l'unité à la somme de deux nombres rationnels respectivement plus grands que A et B ; il suffira donc de prendre $\gamma \leqq \frac{\varepsilon}{P}$. Les deux ensembles (E), (E') satisfont aux conditions spécifiées au n° **17** ; ils définissent un nombre irrationnel ou rationnel plus grand que tous les nombres de (E), plus petit que tous les nombres de (E'), c'est le produit AB.

La classe inférieure relative à AB est formée des nombres de (E), auxquels on adjoindra toutefois o et les nombres rationnels négatifs ; la classe supérieure relative à AB est formée des nombres de E'.

Considérons en effet l'ensemble (E) et les nombres positifs de la classe inférieure relative à AB ; chaque nombre de l'ensemble E est l'un de ces nombres positifs ; l'un quelconque m de ces nombres positifs, plus petits que AB, est égal ou inférieur à un nombre de l'ensemble (E), c'est-à-dire au produit de deux nombres positifs a, b respectivement plus petits que A, B ; on a alors $m \leqq ab$, et le nombre m est le produit des deux nombres a et $\frac{m}{a} \leqq b$, qui sont respectivement plus petits que A, B ; donc m est un nombre de (E). On voit de même que l'ensemble (E') coïncide avec la classe supérieure relative à AB.

On a

$$\text{(1)} \qquad AB = BA.$$

Le produit de trois nombres positifs A, B, C s'obtient en multipliant par le troisième C le produit AB des deux premiers. La classe inférieure relative au produit (AB)C est formée des nombres négatifs, de zéro, et des nombres obtenus en multipliant trois nombres positifs appartenant respectivement aux classes inférieures relatives aux nombres A, B, C ; la classe supérieure relative au produit (AB)C est formée des nombres obtenus en multipliant trois nombres appartenant respectivement aux classes supérieures relatives à A, B, C. Ceci s'étend sans peine au produit de quatre, cinq,... facteurs. On a

$$\text{(2)} \qquad (AB)C = A(BC).$$

Dans un produit d'un nombre quelconque de facteurs positifs on peut intervertir l'ordre des facteurs, remplacer tels facteurs que l'on veut par leur produit effectué.

A étant un nombre positif, on a

$$(3) \qquad A \times 1 = A;$$

en effet, un nombre rationnel positif plus petit que $A \times 1$ étant le produit d'un nombre rationnel positif a, plus petit que A par un nombre rationnel positif plus petit que 1, est plus petit que a et, par suite, que A ; de même tout nombre rationnel plus grand que $A \times 1$ est plus grand que A ; les nombres $A \times 1$ et A sont égaux.

Si A, B, C sont des nombres positifs on a :

$$(4) \qquad (A + B) C = AC + BC.$$

En effet, un nombre rationnel positif plus petit que $(A + B)C$ est le produit par un nombre rationnel positif c, plus petit que C, d'un nombre rationnel positif plus petit que $A + B$, c'est-à-dire de la somme $a + b$ de deux nombres rationnels a, b plus petits respectivement que A, B ; or, le produit $(a + b)c$ étant égal à $ac + bc$, est la somme de deux nombres rationnels ac, bc respectivement plus petits que AC, BC ; le produit $(a + b)c$ et, par conséquent, n'importe quel nombre rationnel positif plus petit que $(A + B)C$ est donc moindre que $AC + BC$; on voit de même que tout nombre rationnel plus grand que $(A + B)C$ est plus grand que $AC + BC$: les deux nombres $(A + B)C$ et $AC + BC$ sont égaux (n° **12**).

Les égalités (1), (2), (3), (4) expriment les propriétés fondamentales de la multiplication ; elles sont établies pour les nombres positifs. En regardant comme nul le produit de deux ou plusieurs facteurs dont l'un est nul et en se reportant pour les nombres négatifs à la règle des signes, on définit le produit de deux nombres positifs, nuls ou négatifs, et l'on étend à tous les cas les propositions qu'expriment ces égalités.

Les propositions relatives aux inégalités, qui concernent la multiplication, peuvent aussi être regardées comme établies.

24. — Aux nombres rationnels positifs a, b,..., on peut faire

correspondre leurs inverses $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \ldots$; si les premiers nombres sont rangés par ordre de grandeur croissante, les seconds sont rangés par ordre de grandeur décroissante. D'après cela, à chaque nombre irrationnel positif A, on peut faire correspondre un nombre irrationnel positif A′ de la façon suivante : la classe inférieure relative à A′ est formée des inverses des nombres qui appartiennent à la classe supérieure relative à A, du nombre o et des nombres rationnels négatifs ; la classe supérieure relative à A′ est formée des inverses des nombres positifs qui appartiennent à la classe inférieure relative à A. Il est clair que les deux classes ainsi définies comprennent tous les nombres rationnels ; sauf ce dernier point, ce qu'on vient de dire s'appliquerait aussi bien à un nombre rationnel. Les deux nombres A, A′, dont chacun se déduit de l'autre de la même façon, sont dits inverses l'un de l'autre. Le produit de deux nombres inverses est égal à 1, puisque 1 est plus grand que le produit de deux nombres positifs appartenant aux classes inférieures relatives à A, A′, plus petit que le produit de nombres positifs appartenant aux classes supérieures relatives à A, A′.

Lorsque A est négatif, son inverse est un nombre négatif A′ dont la valeur absolue est l'inverse de la valeur absolue de A. Dans ce cas encore le produit AA′ est égal à 1, et ce nombre A′ est le seul dont le produit par A soit égal à 1 ; à un nombre nul ne correspond aucun nombre inverse.

L'inverse d'un nombre A se représente par $\frac{1}{A}$.

25. — Etant donnés deux nombres A, C, existe-t-il un nombre B tel que l'on ait

$$BA = C?$$

Un tel nombre ne peut exister si A est nul et C différent de zéro, puisque le produit d'un nombre quelconque par o est nul ; je supposerai essentiellement que A ne soit pas nul.

Soit A′ son inverse ; en supposant que B vérifie l'égalité précédente, on devra avoir (BA)A′ = CA′ ; on a d'ailleurs

$$(BA)A' = B(AA') = B \times 1 = B;$$

donc B ne peut être égal qu'à CA'; d'ailleurs (CA') A est égal à C(A'A) ou à C. Il n'y a donc qu'un nombre qui satisfasse à la condition posée et il y en a un : ce nombre est

$$CA' = C \times \frac{1}{B};$$

On écrit $\frac{C}{B}$ avec le même sens que $C \times \frac{1}{B}$.

On a maintenant tout ce qu'il faut pour étendre aux nombres irrationnels les propositions qui se rapportent à l'addition, à la soustraction, à la multiplication, à la division. Il reste à définir la racine n^e arithmétique d'un nombre positif A.

26. — Étant donné un nombre positif A on demande de trouver un nombre positif x qui vérifie l'équation

$$x^n = A$$

où n est un nombre entier plus grand que 1. Un tel nombre, s'il existe, est évidemment unique, puisque la puissance n^e d'un nombre positif plus grand ou plus petit que x est plus grande ou plus petite que x^n. Supposons qu'il n'existe pas de nombre rationnel qui vérifie cette équation.

Rangeons dans une première classe tous les nombres rationnels positifs dont la puissance n^e est moindre que A, dans une seconde classe tous les nombres rationnels positifs dont la puissance n^e est plus grande que A. Cette décomposition en deux classes des nombres rationnels définit un nombre B. Le produit de n nombres positifs rationnels moindres que B est au plus égal à la n^e puissance du plus grand d'entre eux et par conséquent moindre que A, puisque le plus grand de ces n nombres appartient certainement, comme eux tous, à la première classe. Le produit de n nombres positifs rationnels plus grands que B est au moins égal à la n^e puissance du plus petit d'entre eux et par conséquent plus grand que A, puisque le plus petit de ces n nombres appartient certainement, comme eux tous, à la seconde classe. Le nombre A satisfait donc à la définition du produit de n nombres égaux à B et l'on a $B^n = A$.

Puisque, par hypothèse, il n'y a pas de nombre rationnel positif

qui vérifie l'équation $x^m = A$, il faut que le nombre B, que l'on vient de définir et dont on a montré qu'il vérifiait cette équation, soit irrationnel ; c'est-à-dire qu'il n'y a pas, parmi les nombres rationnels plus petits que B, un nombre plus grand que tous les autres, ni, parmi les nombres rationnels plus grands que B, un nombre plus petit que tous les autres. Au reste, c'est un point qu'il ne serait pas difficile d'établir directement.

27. — Le nombre positif x qui vérifie l'égalité $x^n = A$ est la racine n^e arithmétique de A, et se représente par $\sqrt[n]{A}$; je laisse de côté les propositions, bien connues du lecteur, qui concernent le calcul arithmétique des radicaux et je me contente, en supprimant les démonstrations, de rappeler les définitions qui concernent les exposants fractionnaires, positifs ou négatifs. En désignant par p, q des nombres naturels, on adopte les définitions

$$A^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{A^p}, \qquad A^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{A^p}}, \qquad A^0 = 1,$$

définitions qui, pour être légitimes, exigent qu'on ait établi l'égalité $\sqrt[q]{A^p} = \sqrt[q']{A^{p'}}$ quand la fraction $\frac{p}{q}$ est égale à la fraction $\frac{p'}{q'}$. Dès lors A^α est défini quel que soit le nombre rationnel α, et l'on prouve que l'on a, quels que soient les nombres rationnels α, β

$$A^\alpha \times A^\beta = A^{\alpha+\beta}, \qquad (A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta};$$

il faut entendre que les nombres $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ s'ils ne sont pas entiers, doivent être remplacés par les fractions à termes entiers qui leur sont égales, afin que l'on puisse appliquer les définitions précédentes.

J'aurai encore besoin des remarques qui suivent.

Si A est un nombre positif et n un nombre naturel, $\sqrt[n]{A}$ est plus grand que 1, égal à 1, ou plus petit que 1, suivant que A est lui-même plus grand que 1, égal à 1, ou plus petit que 1. Cela résulte de ce que le produit de n facteurs égaux à $\sqrt[n]{A}$ est plus grand que 1, égal à 1, plus petit que 1, suivant que l'un de ces facteurs est plus grand que 1, égal à 1, plus petit que 1. Par conséquent, en supposant $A > 1$, A^α est plus grand ou plus petit que 1 suivant

que le nombre rationnel α est positif ou négatif; A^α est égal à 1 quand α est nul et seulement dans ce cas; $A^\beta = A^\alpha \times A^{\beta-\alpha}$ est plus grand que A^α, égal à A^α, plus petit que A^α suivant que le nombre rationnel β est plus grand que le nombre rationnel α, qu'il lui est égal, qu'il lui est inférieur; en particulier $A^{1+\alpha}$ est supérieur à A, égal à A, plus petit que A suivant que le nombre rationnel α est positif, nul, négatif. Des observations analogues s'appliquent au cas où A est plus petit que 1.

La définition de A^α, quand α est irrationnel, aurait ici sa place naturelle; en supposant $A > 1$, A^α peut être défini comme plus grand que tous les nombres $A^{\alpha'}$ et plus petit que tous les nombres $A^{\alpha''}$, en désignant par α' et par α'' des nombres rationnels l'un plus petit, l'autre plus grand que α. Toutefois, il est avantageux de renvoyer cette définition à plus tard, afin de la rapprocher d'autres propriétés qui n'ont pas encore été établies.

28. — L'ensemble des nombres rationnels et irrationnels constitue ce que l'on appelle les nombres *réels*.

La notion de nombre irrationnel, la théorie des opérations à effectuer sur de tels nombres ont été présentées dans les numéros (**9-27**) sous une forme purement abstraite. On a toutefois introduit cette notion (n° **7**) en faisant intervenir quelques notions géométriques. Il n'est peut-être pas inutile d'observer que, tout en gardant l'avantage de la représentation et du langage géométrique, il est possible de rester dans la pure analyse. De ce point de vue un point est simplement un nombre réel, la droite est l'ensemble de tous les nombres réels; un segment limité par deux points (ou nombres a, b est l'ensemble des nombres a, b et des nombres compris entre a et b; on le représentera, si l'on veut par le symbole (a, b). Cet ensemble, ou ce segment, est aussi ce qu'on appelle l'*intervalle* (a, b). La longueur du segment $(a, b,)$ sera le nombre positif $|b - a|$. Le point a sera à droite ou à gauche du point b suivant que l'on aura entre les nombres a, b, la relation $a > b$ ou $a < b$. Il est, à ce que je crois, inutile d'insister sur ces façons de parler, qui seront étudiées plus à fond à propos des systèmes de deux variables.

29. — La généralisation apportée aux définitions des opérations fondamentales et le fait que les propriétés essentielles de ces opérations subsistent permettent d'appliquer au calcul des nombres irrationnels les règles élémentaires concernant les calculs approchés. Ces règles sont fondées sur les identités suivantes, où $A' = A - \alpha$, $B' = B - \beta$ désignent des *valeurs approchées* des nombres A, B, et où α, β désignent les erreurs :

$$(A + B) - (A' + B') = \alpha + \beta, \qquad A - B - (A' - B') = \alpha - \beta$$

$$AB - A'B' = A'\beta + B'\alpha + \alpha\beta, \qquad \frac{A}{B} - \frac{A'}{B'} = \frac{B'\alpha - A'\beta}{B'(B' + \beta)};$$

chacune de ces identités [1] permet d'évaluer une limite supérieure de l'erreur commise, pour chacune des opérations fondamentales, quand on substitue aux nombres exacts A, B les nombres approchés A', B' et de montrer que cette erreur peut être rendue aussi petite qu'on le veut en prenant les nombres α, β assez petits. Ainsi, quand on a les premiers chiffres des représentations décimales de deux nombres rationnels ou irrationnels, on peut avoir une valeur approchée de leur somme, de leur différence, de leur produit, de leur rapport..., et l'on peut reconnaître au moyen des règles développées dans les traités d'arithmétique, quels chiffres décimaux du nombre calculé appartiennent d'une façon certaine à la représentation décimale du nombre cherché.

Au lieu de la représentation décimale, on peut employer telles valeurs approchées que l'on veut. Il est clair que la connaissance des valeurs approchées d'un nombre fournit sur lui un renseignement d'autant plus précieux que ces valeurs approchent davantage de ce nombre et il importe évidemment d'avoir celles de ces valeurs qui ont la forme la plus simple. A cet égard, les propositions qui suivent ont une grande importance.

30. — Soit A un nombre réel, autre que o ; considérons les valeurs de l'expression $Ay - x$ où x et y sont assujettis à ne prendre que des valeurs entières, y ne pouvant prendre que les valeurs 1, 2, 3, ..., l : parmi les valeurs de $Ay - x$, il y en a au

[1] La dernière n'a de sens que si B et B' sont différents de zéro ; elle n'est applicable à la question posée que si B et B' sont de même signe.

moins une qui est moindre en valeur absolue que $\frac{1}{l}$. Si on admet cette proposition, il en résulte évidemment que parmi les fractions à termes entiers dont le dénominateur ne dépasse pas l, il y en a une au moins $\frac{x}{y}$ dont la différence avec A est moindre que $\frac{1}{ly}$.

Si, dans l'expression $l(Ay - x)$, nous donnons à y les valeurs $1, 2, 3\ldots, l$ et si nous prenons à chaque fois pour x la partie entière de Ay, nous obtiendrons l nombres positifs, plus petits que l, dont les parties entières ne peuvent donc être que les nombres $0, 1, 2, \ldots, l-1$. Si l'une de ces parties entières est 0, le théorème est vérifié. Si aucune de ces l parties entières n'est nulle, il faut que, pour deux nombres $l(Ay_1 - x_1)$, $l(Ay_2 - x_2)$, où y_2 est supposé plus grand que y_1, ces parties entières soient égales; en sorte que la différence de ces deux nombres, c'est-à-dire $l[A(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)]$ sera, en valeur absolue, moindre que 1; comme $y_2 - y_1$, $x_2 - x_1$ sont entiers, que le premier de ces deux nombres est positif et plus petit que l, la proposition est démontrée. Si A est positif, il est clair que x_2 ne peut être plus petit que x_1, puisque, autrement, le nombre $l[A(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)]$ serait supérieur ou égal à l.

On trouve dans plusieurs recueils ([1]) des tables donnant la valeur des cent premiers multiples de $\frac{2}{\pi}$ et de $\frac{\pi}{2}$; la mantisse du produit de $\frac{2}{\pi}$ par 11, égale à 7,0028..., commence par deux zéros; on en conclut que $\frac{7}{11}$ est une valeur approchée de $\frac{2}{\pi}$ avec une erreur moindre que $\frac{3}{11\,000} < \frac{1}{11 \times 100}$. Dans les cent premiers multiples de $\frac{\pi}{2}$, il n'y en a pas dont les mantisses commencent par deux zéros; mais les mantisses des produits de $\frac{\pi}{2}$ par 6 et 13 commencent par les deux mêmes chiffres, et l'on trouve ainsi que $\frac{11}{7}$ est une valeur approchée de $\frac{\pi}{2}$, avec une erreur moindre que

([1]) Par exemple, le *Recueil de formules et de tables numériques* de J. Houël.

$\frac{5}{7000} < \frac{1}{7 \times 100}$. — De même la différence entre π^2 et $\frac{227}{23}$ est moindre que $\frac{3}{20000} < \frac{1}{23 \times 100}$.

La théorie des fractions continues arithmétiques nous fournira tout à l'heure un moyen systématique d'obtenir des fractions à termes entiers qui approchent ainsi d'un nombre donné A ; mais il convient auparavant de faire quelques observations sur la proposition précédente et d'en tirer quelques conséquences.

Soient A, B deux nombres quelconques, positifs ou négatifs, dont toutefois, le rapport $\frac{B}{A}$ est supposé irrationnel. Il est clair que l'expression $Ax + By$, où x, y désignent (comme on le supposera dans tout ce numéro) deux nombres entiers positifs, nuls ou négatifs, ne peut être nulle sans que l'on ait à la fois $x = 0$, $y = 0$, puisque, autrement, on aurait $\frac{B}{A} = -\frac{x}{y}$ et que le nombre $\frac{B}{A}$ est supposé irrationnel.

Il résulte du théorème précédent que l'on peut trouver des valeurs entières de x, y qui rendent l'expression $Ax + By$ aussi petite en valeur absolue que l'on voudra ; en d'autres termes, si l'on se donne un nombre positif ε, aussi petit qu'on veut, il existe des nombres entiers x, y tels que l'on ait

$$|Ax + By| < \varepsilon\,;$$

cette inégalité équivaut en effet à la suivante

$$\left|\frac{B}{A} y + x\right| < \frac{\varepsilon}{|A|}\,;$$

Il suffira d'appliquer le théorème précédent en prenant l plus grand que $\frac{|A|}{\varepsilon}$.

Il résulte de là qu'on peut trouver des nombres entiers x, y qui font acquérir à l'expression $Ax + By$ des valeurs aussi voisines de tel nombre C que l'on voudra ; soit en effet ε un nombre positif aussi petit que l'on voudra et soient x_0, y_0 des valeurs telles que la valeur absolue η de $Ax_0 + By_0$ soit moindre que ε ; si l'on considère la progression arithmétique indéfinie dans les deux sens

$$\ldots, \quad -2\eta, \quad -\eta, \quad 0, \quad \eta, \quad 2\eta, \quad \ldots$$

le nombre C sera égal à l'un des termes de cette suite ou tombera entre deux termes consécutifs ; si l'on a, n étant entier,

$$n\eta_1 \leqq C < (n+1)\eta_1,$$

la différence $Anx_0 + Bny_0 - C$ sera moindre en valeur absolue que η_1 et par suite que ε ; comme nx_0, ny_0 sont entiers, la proposition est démontrée.

31. — Ces résultats conduisent à l'interprétation géométrique suivante ; sur l'axe qui sert à représenter les nombres, il y a des points dont l'abscisse est de la forme $Ax + By$ et qui sont aussi rapprochés que l'on veut de tel point que l'on veut ; il y a de tels points entre deux points arbitrairement choisis P, Q puisqu'il y en a qui sont aussi voisins que l'on voudra du milieu de PQ.

Cette proposition peut d'ailleurs se démontrer indépendamment du théorème du n° **30**.

Remarquons d'abord, en effet, que si deux ou plusieurs nombres sont de la forme $Ax + By$, il en est de même de leur somme, de leur différence, du produit de l'un quelconque d'entre eux par un nombre entier : en particulier, si le point α_1 a une abscisse de cette forme, il en sera de même de tous les points α_1, α_2, α_3, ..., α'_1, α'_2, α'_3..., obtenus en portant bout à bout, à partir de l'origine O, à droite ou à gauche, des segments égaux à $O\alpha_1$; si les deux points α, β ont des abscisses de la forme précédente, il en sera de même de tous les points obtenus en portant bout à bout, à partir de O, à droite ou à gauche, des segments égaux à la distance de ces deux points. Si donc entre deux points de l'espèce considérée il y a un troisième point de la même espèce, on est sûr par cela même qu'il y a un point de la même espèce dont la distance à l'origine est moindre que la distance mutuelle des deux premiers points.

Ceci posé, soit ε un nombre positif donné. Si la distance entre deux points distincts de l'espèce considérée était toujours supérieure ou égale à ε, entre le point O et un point quelconque P de l'axe, situé, par exemple, à droite de O, il ne pourrait y avoir qu'un nombre fini de points dont l'abscisse fût de la forme $Ax + By$; n au plus entre O et P, si l'on a $|OP| \leqq n\varepsilon$; soit alors R celui de ces points qui est le plus rapproché du point O et soit

$\varepsilon_0 = Ax_0 + By_0$ son abscisse ; tous les points dont l'abscisse est de la forme $m\varepsilon_0$, m étant un entier quelconque, appartiendront à l'espèce considérée ; entre deux d'entre eux, il ne pourra se placer aucun point de cette espèce, sans quoi R ne serait pas le point de cette espèce le plus rapproché du point O ; quels que soient les entiers x et y, on pourra donc trouver un entier m tel que l'on ait

$$Ax + By = m(Ax_0 + By_0),$$

d'où l'on tirera

$$\frac{A}{B} = -\frac{y - my_0}{x - mx_0},$$

ce qui est impossible, puisque $\frac{A}{B}$ est irrationnel.

Donc quelque petit que soit ε, il y a un point dont l'abscisse ε_0, de la forme $Ax_0 + By_0$, est moindre que ε ; dès lors, comme un point quelconque de la droite tombe soit sur l'un des points dont l'abscisse est de la forme $m\varepsilon_0$ soit, entre deux consécutifs de ces points, il est clair qu'il y a des points de l'espèce considérée, aussi voisins qu'on voudra de tel point de la droite qu'on voudra.

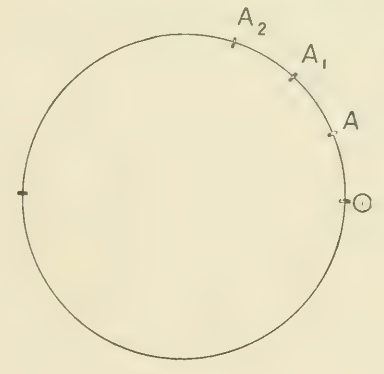


Fig. 5.

La proposition suivante, que je me contente d'énoncer, ne diffère pas au fond de celle qui précède. Si l'on considère un cercle et un point O sur ce cercle ; si l'on porte à partir du point O des arcs égaux OA, AA_1, A_1A_2,..., en tournant autant qu'on voudra autour du cercle, et si l'arc OA est incommensurable avec la circonférence du cercle, on peut trouver un point A_n qui s'approche autant qu'on le veut d'un point donné I sur le cercle. Quand l'arc OA est commensurable avec la circonférence, on sait que les points A, A_1, A_2, ... sont en nombre limité.

32. — Voici maintenant d'autres propositions du même genre que le théorème du n° **30**.

Si A_1, A_2, ..., A_n sont des nombres quelconques, non tous nuls, et l un nombre naturel donné, il existe un nombre entier x et des nombres entiers y_1, y_2, ..., y_n inférieurs ou égaux à l en valeur absolue, mais non tous nuls, tels que l'expression

$$A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n - x$$

soit moindre que $\frac{1}{l^n}$, en valeur absolue. Remplaçons en effet dans l'expression précédente y_1, y_2, ..., y_n par un système de valeurs prises parmi les nombres 1, 2, 3, ..., l et x par la partie entière de $A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n$; on obtiendra ainsi un nombre positif moindre que un ; en sorte que la partie entière du nombre $l^n (A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n - x)$, étant positive et moindre que l^n, est l'un des nombres 0, 1, 2, ..., $l^n - 1$; si elle est nulle, le théorème est vérifié. Or, on peut prendre pour y_1, y_2, ..., y_n des systèmes de valeurs en nombre égal à l^n ; si pour aucun de ces systèmes la partie entière de $l^n (A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_n y_n - x)$ n'est nulle, c'est que, pour deux systèmes distincts y_1, y_2, ..., y_n et y'_1, y'_2, ..., y'_n les parties entières sont égales, en sorte que la valeur absolue de

$$l^n \left[A_1 (y_1 - y'_1) + A_2 (y_2 - y'_2) + \dots + A_n (y_n - y'_n) - (x - x') \right]$$

est moindre que 1. La proposition est démontrée. Si par exemple on prend $A_1 = \pi$, $A_2 = \pi^2$, $l = 10$, on trouve

$$\pi^2 + 8\pi - 35 = 0{,}002 \dots < \frac{1}{100} \text{ (1)}.$$

Soient A_1, A_2, ..., A_n, des nombres quelconques, non nuls et

(1) La différence entre π et la racine positive de l'équation

$$x^2 + 8x - 35 = 0$$

est moindre que $\frac{1}{5\,000}$; signalons dans le même ordre d'idées l'équation

$$64x^2 - 160x - 129 = 0$$

dont la racine positive diffère de π d'une quantité moindre que $\frac{1}{10^7}$. (E. Borel, *Sur l'approximation des nombres réels par les nombres quadratiques*, Bulletin de la Société mathématique de France, t. XXXI, p. 157).

l un nombre naturel donné ; on peut trouver des fractions à termes entiers

$$\frac{x_1}{y}, \quad \frac{x_2}{y}, \quad \dots, \quad \frac{x_n}{y}$$

dont le dénominateur soit un nombre naturel au plus égal à l^n et qui diffèrent respectivement des nombres $A_1, A_2, \dots, A_n$ de quantités moindres que $\frac{1}{ly}$.

En effet dans les expressions

$$A_1 y - x_1, \quad A_2 y - x_2, \quad \dots, \quad A_n y - x_n,$$

donnons à y les valeurs $1, 2, 3, \dots, l^n$ et prenons pour $x_1, x_2, \dots, x_n$ les parties entières de $A_1 y, A_2 y, \dots, A_n y$; les n nombres

$$l(A_1 y - x_1), \quad l(A_2 y - x_2), \quad \dots, \quad l(A_n y - x_n)$$

sont tous positifs et moindres que l ; chacune de leurs parties entières est l'un des nombres $0, 1, 2, \dots, l - 1$; si pour une valeur de y, toutes les n parties entières sont nulles, le théorème est vérifié. Sinon, puisqu'il y a l^n valeurs de y, autant que l'on peut former de systèmes distincts en prenant n nombres dont chacun soit l'un des nombres $0, 1, 2, \dots, l - 1$, il faut qu'il y ait deux valeurs y', y'' telles que les parties entières des nombres

$$l(A_1 y' - x_1'), \quad l(A_2 y' - x_2'), \quad \dots,$$

soient les mêmes que les parties entières des nombres

$$l(A_1 y'' - x_1''), \quad l(A_2 y'' - x_2''), \quad \dots ;$$

en sorte que les nombres

$$l[A_1(y' - y'') - (x_1' - x_1'')], \quad l[A_2(y' - y'') - (x_2' - x_2'')], \dots$$

sont tous moindres que 1 en valeur absolue. Rien n'empêche de supposer $y' > y''$; la différence positive $y' - y''$ est alors moindre que l, elle est entière ainsi que les nombres $x_1' - x_1''$, $x_2' - x_2''$, ... ; le théorème est démontré.

Par exemple, en prenant $A_1 = \pi$, $A_2 = \pi^2$, $l = 5$, on trouve que les erreurs commises en prenant pour π et π^2 les deux frac-

tions $\frac{69}{22}$, $\frac{217}{22}$ dont le dénominateur commun est inférieur à 5^2, sont moindres que $\frac{1}{5 \cdot 22}$.

II. — DIGRESSION SUR LES FRACTIONS CONTINUES ARITHMÉTIQUES

33. — La théorie des fractions continues arithmétiques fournit le moyen systématique d'obtenir les fractions les plus simples qui approchent le plus possible d'un nombre donné A positif ou négatif, mais non entier.

Etant donné un nombre quelconque A, autre que zéro, on obtient une première valeur approchée de ce nombre, en prenant sa partie entière a_0 ; cette valeur est approchée par défaut ; elle est négative si A est négatif, nulle si A est compris entre zéro et un, positive si A est plus grand que 1, l'erreur correspondante $A - a_0$ est positive et moindre que 1 ; mettons-la sous la forme $\frac{1}{A_1}$, en sorte que l'on ait $A = a_0 + \frac{1}{A_1}$.

A_1 est un nombre plus grand que 1 ; soit a_1 sa partie entière, qui sera au moins égale à 1 ; a_1 est une valeur approchée par défaut de A_1, $\frac{1}{a_1}$ est une valeur approchée par excès de $\frac{1}{A_1}$; par suite $a_0 + \frac{1}{a_1}$ est une valeur approchée par excès de A. Soit de même $A_1 - a_1 = \frac{1}{A_2}$; A_2 est un nombre plus grand que 1 ; sa partie entière a_2, au moins égale à 1, est une valeur approchée par défaut de A_2 ; $a_1 + \frac{1}{a_2}$ est donc une valeur approchée par excès de A_1 et si, dans $a_0 + \frac{1}{A_1} = A$, on remplace A_1 par une valeur approchée par excès, $a_1 + \frac{1}{a_2}$, on obtiendra une valeur approchée

par défaut de A, c'est à savoir

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}.$$

De même en posant $A_2 = a_2 + \frac{1}{A_3}$ et en désignant par a_3 la partie entière de A_3, le nombre

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}$$

sera une valeur approchée par défaut de A_1, et si, dans $a_0 + \frac{1}{A_1} = A$, on remplace A_1 par cette valeur approchée par défaut de A_1, on obtiendra une valeur approchée par excès de A, c'est à savoir

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}}.$$

On voit d'ailleurs que A peut être mis sous les formes

$$a_0 + \frac{1}{A_1}, \qquad a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{A_2}}, \qquad a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{A_3}}}.$$

En continuant de la même façon, on obtient une suite de nombres entiers $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ qui, à partir de a_1, sont au moins égaux à 1, qui sont respectivement les parties entières des nombres

$$A, \quad A_1 = \frac{1}{A - a_0}, \quad A_2 = \frac{1}{A_1 - a_1}, \quad \ldots, \quad A_n = \frac{1}{A_{n-1} - a_{n-1}}, \quad \ldots,$$

lesquels, à partir de A_1, sont plus grands que 1, puis une suite de fractions, dites fractions continues limitées,

$$a_0, \quad a_0 + \frac{1}{a_1}, \quad a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}, \quad \ldots, \quad a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ldots + \cfrac{1}{a_n}}, \quad \ldots$$

qui peuvent être regardées comme des valeurs approchées de A, alternativement par défaut et par excès ; le raisonnement précédent montre aisément que chacune d'elles est comprise entre celle qui

la précède et celle qui la suit ; c'est un résultat qu'on retrouvera tout à l'heure. Les nombres $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sont dits *quotients incomplets* ; les nombres $A, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ dont ils sont les parties entières sont les *quotients complets* correspondants ; toutefois, en *comptant* les uns et les autres, je laisserai systématiquement de côté soit a_0, soit A ; a_n sera dit le n^e quotient incomplet, ou le quotient incomplet de rang (ou d'indice) n ; de même pour A_n. Dans une des fractions limitées précédemment écrites, si l'on remplace le dernier quotient incomplet, a_n par exemple, par le quotient complet correspondant A_n, on reproduit le nombre A d'où l'on est parti.

Il est clair, d'après leur formation même, que les fractions continues limitées dont le dernier quotient incomplet est de rang (d'indice) impair sont des valeurs approchées par excès ; elles diminuent quand ce rang augmente ; au contraire les fractions continues pour lesquelles le dernier quotient incomplet est de rang pair sont des valeurs approchées par défaut, elles augmentent quand ce rang augmente. Ces résultats seront établis à nouveau, dans un instant.

La connaissance des premiers chiffres de la représentation décimale de A permet de calculer les premiers des nombres entiers $a_0, a_1, a_2, \ldots$

Par exemple si l'on suppose $A = \pi = 3,141592653\ldots$, on trouve, en ne conservant à chaque division que des décimales dont on soit sûr (¹), pour les quatre premiers quotients complets et incomplets

$$\begin{aligned} A &= 3,141592653\ldots, & a_0 &= 3,\\ A_1 &= 7,062513\ldots, & a_1 &= 7,\\ A_2 &= 15,996\ldots, & a_2 &= 15,\\ A_3 &= 1,00\ldots, & a_3 &= 1, \end{aligned}$$

On ne pourrait être arrêté dans la suite des opérations que l'on vient de décrire que si l'on trouvait un quotient complet A_n qui fût un nombre entier a_n ; alors l'expression $\frac{1}{A_n - a_n}$, dont le dénominateur est nul, n'aurait plus de sens ; le nombre A est dans ce

(¹) On sera certainement dans ce cas tant que, dans la division, le reste partiel auquel on est arrivé dépasse la partie écrite au quotient, regardée comme un nombre entier.

cas, égal à la fraction continue limitée,

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}},$$

et il est évidemment rationnel.

Inversement, si le nombre $A = \frac{p}{q}$ est un nombre rationnel, les opérations par lesquelles on détermine les quotients complets successifs sont les opérations même auxquelles donne lieu la recherche du plus grand commun diviseur entre les entiers p, q ; ces opérations se terminent et l'on finit par trouver un reste (égal à 1 si p, q sont premiers entre eux) qui divise le reste précédent ; le quotient, certainement plus grand que 1, est le dernier quotient a_n de la fraction continue ; on peut l'appeler aussi bien complet qu'incomplet. Puisqu'il est plus grand que 1, on peut le remplacer par $a_n - 1 + \frac{1}{1}$, et l'on voit qu'on peut *développer un nombre rationnel en fraction continue* de deux façons différentes, avec un nombre pair ou impair de quotients incomplets ; les deux formes ne diffèrent d'ailleurs qu'à l'extrémité de la fraction continue. Par exemple, pour la fraction $\frac{355}{113}$, la suite des quotients incomplets est 3, 7, 16, ou 3, 7, 15, 1.

Si le nombre A est irrationnel, on pourra continuer indéfiniment les opérations et l'on trouvera ainsi une suite indéfinie de nombres entiers $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, suite qui est déterminée dès que le nombre A est déterminé.

Il importe, avant d'aller plus loin, d'étudier d'un peu plus près la suite des fractions continues limitées qui correspondent à ces quotients incomplets.

34. — Nous avons d'abord à former certaines fonctions entières ou rationnelles des quantités

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots,$$

et à en établir des propriétés dans lesquelles il n'est nullement nécessaire de supposer que ces quantités sont des nombres entiers déduits de A comme il a été expliqué : dans ce numéro, les lettres

$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ désigneront, si l'on veut, des variables quelconques, formant une suite indéfinie ; on a alors

$$a_0 = \frac{a_0}{1}, \qquad a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1},$$

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = \frac{a_0\left(a_1 + \frac{1}{a_2}\right) + 1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = \frac{(a_0 a_1 + 1)\, a_2 + a_0}{a_1 a_2 + 1},$$

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}} = \frac{(a_0 a_1 + 1)\left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) + a_0}{a_1\left(a_2 + \frac{1}{a_3}\right) + 1}$$

$$= \frac{[(a_0 a_1 + 1)\, a_2 + a_0]\, a_3 + a_0 a_1 + 1}{(a_1 a_2 + 1)\, a_3 + a_1}.$$

On peut continuer ainsi et mettre les fractions qui figurent dans les premiers membres, que je continuerai à appeler des « fractions continues limitées » sous la forme du quotient de deux polynomes entiers en a_0, a_1, a_2, ...

Posons

$$P_0 = a_0, \quad P_1 = a_0 a_1 + 1, \quad P_2 = P_1 a_2 + P_0, \quad P_3 = P_2 a_3 + P_1,$$
$$Q_0 = 1, \quad Q_1 = a_1 \quad\quad Q_2 = Q_1 a_2 + Q_0, \quad Q_3 = Q_2 a_3 + Q_1,$$

les fractions continues limitées qui figuraient dans les premiers membres sont respectivement égales à $\frac{P_0}{Q_0}$, $\frac{P_1}{Q_1}$, $\frac{P_2}{Q_2}$, $\frac{P_3}{Q_3}$. Si l'on pose en général

$$(1) \qquad P_n = P_{n-1} a_n + P_{n-2}, \qquad Q_n = Q_{n-1} a_n + Q_{n-2},$$

ces formules, applicables pour les valeurs entières de n supérieures à 1, déterminent de proche en proche tous les polynomes P_n, Q_n, du moment que l'on prend pour P_0, P_1, Q_0, Q_1 les expressions précédemment écrites ; les fractions rationnelles

$$\frac{P_0}{Q_0} = a_0, \qquad \frac{P_1}{Q_1}, \qquad \frac{P_2}{Q_2}, \qquad \ldots$$

portent le nom de *réduites*.

De même que pour les quotients complets ou incomplets, je ne compterai pas la réduite $\frac{P_0}{Q_0}$; la n^e réduite sera

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1} a_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} a_n + Q_{n-2}}.$$

Je vais montrer qu'elle est égale à la fraction continue limitée dans laquelle le dernier quotient incomplet est a_n; cette proposition a été vérifiée pour les petites valeurs de n; elle s'établit par induction en montrant que, si elle est vraie pour les $n-1$ premières réduites, elle est vraie pour la n^e; or la fraction continue qui se termine par a_n se déduit de la précédente en y remplaçant a_{n-1} par $a_{n-1} + \frac{1}{a_n}$: cette précédente est, par hypothèse, égale à

$$\frac{P_{n-2} a_{n-1} + P_{n-3}}{Q_{n-2} a_{n-1} + Q_{n-3}};$$

la fraction continue suivante s'obtiendra donc en remplaçant dans cette expression a_{n-1}, qui n'entre dans aucun des polynomes P_{n-2}, P_{n-3}, Q_{n-2}, Q_{n-3}, par $a_{n-1} + \frac{1}{a_n}$; on obtient ainsi, après une transformation immédiate,

$$\frac{(P_{n-2} a_{n-1} + P_{n-3}) a_n + P_{n-2}}{(Q_{n-2} a_{n-1} + Q_{n-3}) a_n + Q_{n-2}} = \frac{P_{n-1} a_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} a_n + Q_{n-2}} = \frac{P_n}{Q_n},$$

ainsi qu'il résulte des égalités (1) et de celles qu'on en déduit en changeant n en $n-1$.

En éliminant a_n entre les égalités (1), on trouve

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = -(P_{n-1} Q_{n-2} - P_{n-2} Q_{n-1});$$

l'expression $(-1)^n (P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n)$ ne change pas de valeur quand on change n en $n-1$, elle est donc égale à la valeur -1 qu'elle prend pour $n = 1$ et l'on a

$$(2) \quad \begin{cases} P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1}, \\ \dfrac{P_n}{Q_n} - \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{Q_n Q_{n-1}}. \end{cases}$$

On tire aussi des égalités (1), (2) les suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} P_n Q_{n-2} - P_{n-2} Q_n = (-1)^n a_n \\ \dfrac{P_n}{Q_n} - \dfrac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} = (-1)^n \dfrac{a_n}{Q_n Q_{n-2}} \end{cases}$$

Enfin, si dans la dernière fraction continue limitée

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1} a_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} a_n + Q_{n-2}},$$

on modifie la seule variable a_n pour la remplacer par une autre variable A_n, on aura en vertu des égalités précédentes

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{P_{n-1} A_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} A_n + Q_{n-2}} - \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(Q_{n-1} A_n + Q_{n-2}) Q_{n-1}} \\ \dfrac{P_{n-1} A_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} A_n + Q_{n-2}} - \dfrac{P_n}{Q_n} = (-1)^n \dfrac{A_n - a_n}{(Q_{n-1} A_n + Q_{n-2}) Q_n}. \end{cases}$$

35. — Supposons maintenant que les lettres a_0, a_1, a_2,... a_n,... désignent des nombres. La suite de ces nombres est supposée indéfinie et déterminée, c'est-à-dire que, à chaque rang, se trouve un nombre déterminé. Supposons en outre que les nombres a_1, a_2,..., a_n,... soient positifs ; le nombre a_0 peut être positif, nul ou négatif.

Les polynomes P_n, Q_n deviennent des nombres que je continuerai de désigner par les mêmes lettres ; comme a_0 ne figure pas dans les polynomes Q_0, Q_1,..., on voit que les valeurs numériques de ces derniers polynomes sont positives ; il en est de même pour les polynomes P_n si a_0 est nul ou positif ; tout cela résulte des formules (1) du numéro précédent, les mêmes formules montrent, dans le cas où a_0 est négatif, que si P_1 se trouve, comme P_0, être négatif, les nombres P_2, P_3,..., P_n,... sont tous négatifs.

La relation

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1} a_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} a_n + Q_{n-2}},$$

où Q_n, Q_{n-1}, Q_{n-2} sont positifs montre que la fraction $\frac{P_n}{Q_n}$ est com-

prise entre les deux fractions $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ et $\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}$, qui la précèdent (¹); celles-ci d'après les secondes formules (2) du n° **34** sont toujours inégales; ainsi $\frac{P_2}{Q_2}$ est compris entre $\frac{P_0}{Q_0} = a_0$ et $\frac{P_1}{Q_1} = a_0 + \frac{1}{a_1}$; $\frac{P_3}{Q_3}$ est compris entre $\frac{P_2}{Q_2}$ et $\frac{P_1}{Q_1}$, $\frac{P_4}{Q_4}$ entre $\frac{P_3}{Q_3}$ et $\frac{P_2}{Q_2}$, ...; en d'autres termes on a

$$\frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} < \frac{P_4}{Q_4} < \frac{P_3}{Q_3} < \frac{P_1}{Q_1},$$

et, en continuant de proche en proche,

$$\frac{P_0}{Q_0} < \frac{P_2}{Q_2} < \dots < \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} < \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}} < \dots < \frac{P_3}{Q_3} < \frac{P_1}{Q_1};$$

Ainsi les termes de la suite indéfinie, où les indices sont pairs,

$$(E) \qquad \frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_2}{Q_2}, \dots, \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}, \dots$$

vont en augmentant; ceux de la suite indéfinie

$$(E') \qquad \frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_3}{Q_3}, \dots, \frac{P_{2n-1}}{Q_{2n-1}}, \dots,$$

(¹) J'invoque ici cette proposition bien élémentaire d'algèbre; si l'on considère l'expression

$$y = \frac{Ax + B}{Cx + D}$$

où A, B, C, D sont des nombres fixes, tels que AD — BC ne soit pas nul, et dont les deux derniers C, D sont positifs, la valeur de cette expression, pour toute valeur positive de x, est comprise entre $\frac{A}{C}$ et $\frac{B}{D}$; j'aurai encore à utiliser la proposition plus générale que voici : si x_1, x_2 sont deux valeurs positives de x et y_1, y_2 les valeurs correspondantes de y, la valeur de y qui correspond à x est ou n'est pas comprise entre y_1 et y_2 suivant que x est ou n'est pas compris entre x_1 et x_2. Cela résulte, si l'on veut, de ce que y peut se mettre sous la forme

$$y = \frac{A}{C} - \frac{\frac{AD - BC}{C^2}}{x + \frac{D}{C}},$$

que l'on obtient en faisant la division algébrique de $Ax + B$ par $Cx + D$; cette forme montre que y augmente ou diminue quand x augmente suivant que $AD - BC$ est positif ou négatif.

où les indices sont impairs, vont en diminuant; un terme quelconque de la suite (E) est plus petit qu'un terme quelconque de la suite (E'). Ces diverses propositions résultent aussi facilement des secondes égalités (2), (3). Ajoutons aux conditions déjà imposées aux nombres a_0, $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ celle d'être des nombres entiers (au moins égaux à 1 à partir de a_1). Les nombres P_n, Q_n seront entiers; les nombres Q_n seront tous positifs; ils iront en croissant, comme il résulte des formules (1) du n° **34** et, puisqu'ils sont entiers, ils croîtront indéfiniment, quand n croîtra indéfiniment, c'est-à-dire que, quelque grand que soit le nombre positif L, il existera un nombre entier m tel que, pour n égal ou supérieur à m, on ait $Q_n > L$. La même chose aura lieu pour les nombres P_n si a_0 est nul ou positif; si a_0 est négatif $P_1 = a_0 a_1 + 1$, sera négatif ou nul, et cette dernière circonstance ne pourra se présenter que si l'on a $a_0 = -1$, $a_1 = 1$; $P_2 = a_2 P_1 + P_0$, sera sûrement négatif, ainsi que les nombres P_3, $P_4, \ldots$; les valeurs absolues de P_1, P_2, $P_3, \ldots$ iront en augmentant et en augmentant indéfiniment avec l'indice.

Les fractions à termes entiers $\frac{P_n}{Q_n}$ sont irréductibles pour $n > 1$ comme il résulte de l'égalité

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1},$$

qui montre que P_n, Q_n ne peuvent avoir d'autre diviseur commun que l'unité; ceci a encore lieu pour la fraction $\frac{P_1}{Q_1}$ si elle n'est pas nulle.

La valeur absolue $\frac{1}{Q_n Q_{n-1}}$ de la différence entre deux fractions consécutives $\frac{P_n}{Q_n}$, $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ peut, pour des valeurs suffisamment grandes de n, être supposée aussi petite qu'on le veut, puisque lorsque n croît indéfiniment, il en est de même de Q_n; ainsi, il existe des nombres qui diffèrent aussi peu qu'on le veut pris l'un dans l'ensemble (E) des nombres qui constituent la suite (E) et l'autre dans l'ensemble (E') des nombres qui constituent la suite (E'). Ces deux ensembles (E), (E'), dont tous les éléments sont des nombres rationnels, jouissent des propriétés spécifiées au n° **17**; ils définissent un nombre A compris entre deux nombres quelconques, pris l'un dans l'ensemble (E), l'autre dans l'ensemble (E').

36. — Si les nombres entiers $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ ont été déduits du nombre irrationnel A par la suite des opérations qui ont été décrites au n° 33 et forment la suite indéfinie des quotients incomplets, auxquels correspondent les quotients complets $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$, on a vu que ce nombre A, égal à l'un quelconque des nombres

$$A, \quad a_0 + \frac{1}{A_1}, \quad a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{A_2}}, \quad \ldots,$$

était compris entre deux termes consécutifs de la suite des fractions limitées

$$a_0, \quad a_0 + \frac{1}{a_1}, \quad a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}, \ldots,$$

ou des réduites

$$\frac{P_0}{Q_0}, \quad \frac{P_1}{Q_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2}, \ldots;$$

il ne peut donc être autre que le nombre défini par les deux ensembles (E), (E'); c'est d'ailleurs ce qui résulte encore des égalités (4) du n° 34, qui peuvent évidemment s'écrire, en donnant maintenant à A_n la signification de quotient complet correspondant à a_n,

$$A - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{(Q_{n-1}A_n + Q_{n-2})Q_{n-1}},$$

$$A - \frac{P_n}{Q_n} = (-1)^n \frac{A_n - a_n}{(Q_{n-1}A_n + Q_{n-2})Q_n};$$

A_n est plus grand que a_n et la différence $A_n - a_n$ est plus petite que 1; enfin $Q_{n-1}A_n + Q_{n-2}$ est plus grand que $Q_{n-1}a_n + Q_{n-2} = Q_n$; ces égalités montrent donc que A est compris entre $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ et $\frac{P_n}{Q_n}$, puisque les deux seconds membres sont de signes contraires; que A est plus grand ou plus petit que $\frac{P_n}{Q_n}$ suivant que n est pair ou impair; que la différence entre A et $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ est moindre en valeur absolue que $\frac{1}{Q_n Q_{n-1}}$, d'où il suit, en changeant n en $n+1$, que la différence entre A et $\frac{P_n}{Q_n}$ est moindre,

en valeur absolue, que $\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$; on voit aussi, en passant, que $\frac{P_n}{Q_n}$ approche plus de A que $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$: A est plus grand que toutes les réduites de rang pair, plus petit que toutes les réduites de rang impair ; il est compris entre deux nombres quelconques pris, l'un dans l'ensemble (E), l'autre dans l'ensemble (E'), il est égal au nombre défini par ces ensembles, et l'on a une limite supérieure de l'erreur que l'on commet en choisissant pour valeur approchée de A un nombre pris dans l'un ou l'autre ensemble. On peut avoir aussi une limite inférieure de cette erreur ; en effet la réduite $\frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}}$ est comprise entre A et $\frac{P_n}{Q_n}$, en sorte que l'erreur commise en prenant $\frac{P_n}{Q_n}$ pour A est supérieure en valeur absolue à la différence entre les deux réduites $\frac{P_n}{Q_n}$, $\frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}}$, et par suite, en vertu des équations (3) n° **34** supérieure à $\frac{a_{n+2}}{Q_n Q_{n+2}}$ et, *a fortiori*, à $\frac{1}{Q_n Q_{n+2}}$.

Par exemple, si le nombre A dont on part est le nombre π, on trouvera les réduites successives

$$\frac{3}{1}, \quad \frac{22}{7} = 3,142..., \quad \frac{333}{106} = 3,14150..., \quad \frac{355}{113} = 3,1415929...$$

37. — Ne supposons plus maintenant que la suite illimitée de nombres entiers a_0, a_1, ..., a_n, ... ait été déduite du nombre donné A, mais bien que ce soit cette suite qui soit donnée ; on suppose toujours, bien entendu, que les termes soient, à partir de a_1, au moins égaux à un ; les conclusions du n° **35** subsistent ; les ensembles (E), (E') définissent un nombre que je désignerai encore par A ; je vais prouver que si, sur ce nombre ainsi défini, on fait les opérations du n° **33**, on retrouvera précisément, pour la suite des quotients incomplets, la suite même a_0, a_1, ..., a_n, ...

Tout d'abord les inégalités

$$a_0 < A < a_0 + \frac{1}{a_1},$$

où a_1 est plus grand que 1, montrent que a_0 est la partie entière

de A qui, par suite, peut être mis sous la forme

$$A = a_0 + \frac{1}{A_1},$$

A_1 désignant un nombre positif plus grand que 1 ; c'est le premier quotient complet engendré par le nombre A ; puisque A est compris entre les nombres

$$a_0 + \frac{1}{a_1}, \qquad a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}},$$

qui appartiennent respectivement aux ensembles (E), (E'), il faut que A_1 soit compris entre a_1 et $a_1 + \frac{1}{a_2}$; c'est-à-dire que a_1 est la partie entière de A_1. Au lieu de continuer le raisonnement sous cette forme, ce qui serait d'ailleurs facile, raisonnons par induction : admettons que, en partant du nombre A, défini par les ensembles (E), (E'), on ait fait la suite des opérations décrites au n° **33**, qu'on ait trouvé $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ pour les premiers quotients incomplets et soit A_n le n^e quotient complet : A ou

$$\frac{P_{n-1} A_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} A_n + Q_{n-2}},$$

devra être compris entre les deux fractions

$$\frac{P_{n-1} a_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} a_n + Q_{n-2}}, \qquad \frac{P_{n-1}\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) + P_{n-2}}{Q_{n-1}\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) + Q_{n-2}},$$

qui appartiennent respectivement aux ensembles (E), (E') et, par suite, A_n devra être compris entre a_n et $a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$; a_n est donc la partie entière de A_n, c'est-à-dire le n^e quotient complet. La proposition est démontrée.

Il en résulte que le nombre A, défini, comme on l'a expliqué, au moyen de la suite indéfinie de nombres entiers $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, est irrationnel, puisque, s'il était rationnel, il donnerait naissance à une fraction continue limitée.

38. — Le symbole

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}},$$

où l'on imagine que les fractions s'étagent indéfiniment est, en supposant comme ci-dessus que a_0 soit un entier quelconque et $a_1, a_2, a_3, \ldots$ des entiers positifs au moins égaux à un, est ce qu'on appelle une *fraction continue illimitée* (arithmétique); on appelle valeur de cette fraction continue le nombre irrationnel A dont la définition a été précisée plus haut; inversement, ce nombre A, si l'on fait sur lui les opérations décrites au n° **33**, engendre la fraction continue illimitée précédente, dont $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sont les quotients incomplets: quant aux quotients complets correspondants, il convient de remarquer que, de même que A engendre la fraction continue dont les quotients incomplets sont $a_0, a_1, a_2, \ldots$, le premier quotient complet A_1 engendrerait la fraction continue illimitée dont les quotients incomplets sont $a_1, a_2, a_3, \ldots$, le n^e A_n engendrerait la fraction continue illimitée dont les quotients incomplets sont $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$

Par exemple, si l'on prend, en général

$$a_n = 2 + 4n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

on définira un nombre irrationnel A, lié au nombre e qui sera défini plus tard, par la relation

$$A = \frac{e+1}{e-1}.$$

Il est clair que deux suites illimitées distinctes

$$\begin{array}{lllll} a_0, & a_1, & \ldots, & a_n, & \ldots, \\ a'_0, & a'_1, & \ldots, & a'_n, & \ldots \end{array}$$

satisfaisant aux conditions précédemment expliquées, ne peuvent servir à former deux fractions continues illimitées

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ddots}, \qquad a'_0 + \cfrac{1}{a'_1 + \ddots}$$

dont les valeurs soient égales, puisque la suite des quotients incomplets est entièrement déterminée par la valeur de la fraction.

Au reste, si l'on emploie les mêmes notations pour désigner les éléments analogues formés avec les deux suites, mais en accentuant les lettres qui se rapportent à la seconde, on voit que si l'on suppose d'abord

$$a'_0 = a_0, \qquad a'_1 = a_1, \qquad \ldots, \qquad a'_{n-1} = a_{n-1}, \qquad a'_n > a_n$$

et par suite

$$P_r = P'_r, \qquad Q_r = Q'_r, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1),$$

puis $A'_n > A_n$, les égalités

$$A = \frac{P_{n-1} A_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} A_n + Q_{n-2}}, \qquad A' = \frac{P_{n-1} A'_n + P_{n-2}}{Q_{n-1} A'_n + Q_{n-2}},$$

montrent que A' est plus grand ou plus petit que A suivant que n est pair ou impair. On peut donc reconnaître l'ordre de grandeur de deux nombres sur leurs développements en fraction continue, comme sur leur représentation décimale.

39. — Si une fraction à termes entiers $\frac{p}{q}$ approche plus d'un nombre A que la n^e réduite $\frac{P_n}{Q_n}$, le dénominateur q de cette fraction est plus grand que Q_n, (on suppose q positif).

L'inégalité

$$\left| A - \frac{p}{q} \right| < \left| A - \frac{P_n}{Q_n} \right|$$

traduit la supposition que l'on a faite. Puisque A est compris entre $\frac{P_n}{Q_n}$ et $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ et qu'il approche plus de la première réduite que de la seconde, puisque, enfin, $\frac{p}{q}$ approche plus de A que $\frac{P_n}{Q_n}$, il faut que $\frac{p}{q}$ soit compris entre $\frac{P_n}{Q_n}$ et $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$; sa différence avec l'une ou l'autre des deux fractions est donc moindre en valeur absolue que

leur différence mutuelle, et l'on a

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right| = \frac{|pQ_{n-1}-qP_{n-1}|}{qQ_{n-1}} < \frac{1}{Q_n Q_{n-1}};$$

mais comme le nombre positif $|pQ_{n-1}-qP_{n-1}|$, qui ne peut être nul puisque les deux fractions $\frac{p}{q}$, $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ ne sont pas égales, est au moins égal à un, il faut que qQ_{n-1} soit plus grand que $Q_n Q_{n-1}$, c'est-à-dire que q soit plus grand que Q_n.

40. — La condition nécessaire et suffisante pour que deux nombres irrationnels x et x' donnent naissance à deux fractions continues illimitées telles que la suite des quotients incomplets prise dans la première à partir d'un certain rang soit identique à la suite des quotients incomplets prise dans la seconde à partir d'un certain rang est qu'il y ait entre les nombres x, x' une relation de la forme

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$

où α, β, γ, δ sont des nombres entiers, que l'on peut évidemment supposer sans diviseur commun, et qui, alors, doivent vérifier la relation

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1.$$

Soient en effet

$$a_0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots, \qquad\qquad a'_0, \quad a'_1, \quad \ldots, \quad a'_n, \quad \ldots$$

les deux suites de quotients incomplets auxquelles donne naissance le développement des irrationnelles x, x' en fractions continues ; supposons que l'on ait

$$a_p = a'_q, \qquad a_{p+1} = a'_{q+1}, \qquad a_{p+2} = a'_{q+2}, \qquad \ldots,$$

et reprenons les notations habituelles en accentuant les lettres qui se rapportent à la seconde suite. D'après ce qu'on a dit au n° **38**, A_p sera égal à A'_q et l'on aura

$$x = \frac{P_{p-1}A_p + P_{p-2}}{Q_{p-1}A_p + Q_{p-2}}, \qquad\qquad x' = \frac{P'_{q-1}A_p + P'_{q-2}}{Q'_{q-1}A_p + Q'_{q-2}}$$

En éliminant A_p entre ces deux équations, on trouvera entre x' et x une relation de la forme

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$

et l'on obtient sans peine, en se servant des expressions trouvées pour les nombres α, β, γ, δ au moyen de P_{p-1}, P_{p-2}, $\ldots$, Q'_{q-2}, la relation

$$\alpha\delta - \beta\gamma = (P_{p-1}Q_{p-2} - P_{p-2}Q_{p-1})(P'_{q-1}Q'_{q-2} - P'_{q-2}Q'_{q-1}) = \pm 1.$$

La condition imposée est donc nécessaire ; on va voir qu'elle est suffisante.

Supposons en effet que les deux nombres irrationnels x', x soient liées par la relation

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta},$$

où α, β, γ, δ sont des entiers qui vérifient la condition

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1.$$

Développons x en fraction continue et soit, en conservant toujours les mêmes notations,

$$x = \frac{P_{n-1}A_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}A_n + Q_{n-2}}.$$

On en conclura

$$x' = \frac{aA_n + b}{cA_n + d},$$

en posant

$$a = \alpha P_{n-1} + \beta Q_{n-1}, \qquad b = \alpha P_{n-2} + \beta Q_{n-2},$$
$$c = \gamma P_{n-1} + \delta Q_{n-1}, \qquad d = \gamma P_{n-2} + \delta Q_{n-2};$$

on vérifie de suite que l'on a

$$ad - bc = (\alpha\delta - \beta\gamma)(P_{n-1}Q_{n-2} - P_{n-2}Q_{n-1}) = \pm 1,$$

d'où il suit, en particulier, que a et c sont premiers entre eux.

Mon but est de montrer que, en supposant n assez grand, si l'on développe $\frac{a}{c}$ en fraction continue limitée, $\frac{b}{d}$ peut être regardé

comme l'avant-dernière réduite de cette fraction continue, dont $\frac{a}{c}$ est la dernière réduite ; s'il en est ainsi, la relation entre x' et A_n montre clairement que la fraction continue illimitée dont les premiers quotients incomplets sont ceux de la fraction continue limitée obtenue par le développement de $\frac{a}{c}$, dont les quotients incomplets suivants sont ceux qui figurent dans le développement de A_n, est égale à x' ; le théorème énoncé sera donc complètement établi, quand on aura prouvé la proposition relative à $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{d}$.

Les dénominateurs des réduites étant essentiellement positifs, et allant d'ailleurs en croissant, il faudra pour établir cette dernière proposition, montrer que l'on peut supposer $0 < d < c$; cela d'ailleurs suffit : car s'il en est ainsi, la fraction irréductible $\frac{a}{c}$ pourra être développée en fraction continue limitée avec un nombre pair ou impair de quotients incomplets (n° **33**), telle par conséquent que, en désignant par $\frac{b'}{d'}$ l'avant dernière réduite, la quantité $ad' - b'c$ égale à ± 1, comme $ad - bc$, soit précisément égale à cette dernière quantité, en sorte que l'on ait $a(d - d') = c(b - b')$; le nombre c, premier avec a, doit diviser $d - d'$, mais le dénominateur d' de l'avant dernière réduite est plus petit que c ; si donc d est aussi plus petit que c, c ne peut diviser la différence $d - d'$, à moins que cette différence ne soit nulle ; l'égalité précédente exige que l'on ait aussi $b' = b$ et $\frac{b}{d}$ est bien l'avant dernière réduite de la fraction continue égale à $\frac{a}{c}$.

Tout est donc ramené à montrer que l'on peut, pour n suffisamment grand, supposer $0 < d < c$.

Or, quand n est très grand, les deux quantités

$$\lambda = \frac{c}{Q_{n-1}} = \gamma \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} + \delta, \qquad \mu = \frac{d}{Q_{n-2}} = \gamma \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} + \delta,$$

sont très voisines de $\xi = \gamma x + \delta$; on a en effet

$$|\lambda - \xi| < \frac{|\gamma|}{Q_{n-1} Q_n}, \qquad |\mu - \xi| < \frac{|\gamma|}{Q_{n-2} Q_{n-1}} ;$$

les seconds membres peuvent être supposés aussi petits qu'on le veut ; il suffit de les supposer moindres que la valeur absolue de ξ, qui n'est pas nulle puisque x est irrationnel, pour être sûr que λ, μ et, par suite, c et d sont du même signe que ξ ; or, quitte à changer le signe des quatre nombres α, β, γ, δ, on peut supposer que ξ soit positif. On a d'ailleurs

$$\begin{aligned} c - d &= \lambda Q_{n-1} - \mu Q_{n-2} \\ &= \xi(Q_{n-1} - Q_{n-2}) + (\lambda - \xi)Q_{n-1} - (\mu - \xi)Q_{n-2}, \end{aligned}$$

et, d'un autre côté,

$$|\lambda - \xi| Q_{n-1} < \frac{|\gamma|}{Q_n}, \qquad (\mu - \xi) Q_{n-2} < \frac{|\gamma|}{Q_{n-1}} ;$$

il suffit donc de prendre n assez grand pour que l'on ait

$$\frac{|\gamma|}{Q_n} + \frac{|\gamma|}{Q_{n-1}} < \xi ;$$

on sera certain que $\lambda Q_{n-1} - \mu Q_{n-2}$ ou $c - d$ est positif.

41. — Il est bien aisé de voir que, si la suite des quotients incomplets est périodique, la valeur de la fraction continue est racine d'une équation du second degré à coefficients entiers.

Supposons, en effet, en désignant toujours par a_0, a_1, ... la suite des quotients incomplets, que la période commence à a_0 pour se terminer à a_{n-1}, en sorte que l'on ait

$$a_n = a_0, \quad a_{n+1} = a_1, \quad a_{2n-1} = a_{n-1}, \quad a_{2n} = a_0, \quad \ldots$$

Remarquons en passant que l'hypothèse $a_n = a_0$ exige que a_0 soit au moins égal à 1. On aura, en conservant les notations antérieures, $A_n = A$, $A_{n+1} = A_1$, puisque le quotient complet A_n (n° **38**) peut être regardé comme la valeur de la fraction continue illimitée

$$a_n + \cfrac{1}{a_{n+1} + \cfrac{1}{a_{n+2} + \ldots}},$$

identique à celle qui définit A ; mais on a en général

$$A = \frac{P_{n-1}A_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}A_n + Q_{n-2}} ;$$

A sera donc la racine positive de l'équation du second degré à coefficients entiers

$$Q_{n-1}A^2 + (Q_{n-2} - P_{n-1})A - P_{n-2} = 0$$

Par exemple, en supposant $n-1=3$, $a_0=1$, $a_1=2$, $a_2=3$; on voit que la valeur de la fraction continue périodique est égale à

$$\frac{4+\sqrt{37}}{7}.$$

On ramène aisément à ce cas celui où la période ne commence pas au premier quotient incomplet. On doit à Euler et à Lagrange d'avoir établi la réciproque de cette proposition, c'est-à-dire la périodicité des quotients incomplets de toute fraction continue dont la valeur est racine d'une équation du second degré à coefficients entiers, à racines réelles et irrationnelles.

Soit ([1])

$$\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0 \tag{1}$$

une telle équation, dont les coefficients α, 2β, γ sont entiers, $\beta^2 - \alpha\gamma$ étant positif sans être le carré d'un nombre rationnel; désignons-en les racines par A, A' et supposons qu'on développe la première racine en fraction continue; soit a_0, a_1, ..., a_n, ... la suite des quotients incomplets, et reprenons pour le reste les notations ordinaires. Le n^e quotient complet A_n étant lié à A par la relation

$$A = \frac{P_{n-1}A_n + P_{n-2}}{Q_{n-1}A_n + Q_{n-2}},$$

on aura

$$\alpha(P_{n-1}A_n + P_{n-2})^2 + 2\beta(P_{n-1}A_n + P_{n-2})(Q_{n-1}A_n + Q_{n-2})$$
$$+ \gamma(Q_{n-1}A_n + Q_{n-2})^2 = 0,$$

c'est-à-dire que A_n sera racine de l'équation du second degré à coefficients entiers

$$\alpha_n y^2 + 2\beta_n y + \gamma_n = 0, \tag{2}$$

([1]) La démonstration donnée ici est due à M. Charves (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. I, p. 41).

où l'on suppose

$$\alpha_n = Q_{n-1}^2\left[\alpha\left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right)^2 + 2\beta\,\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} + \gamma\right],$$

$$\beta_n = Q_{n-1}Q_{n-2}\left[\alpha\,\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\,\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} + \beta\left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} + \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}\right) + \gamma\right],$$

$$\gamma_n = Q_{n-2}^2\left[\alpha\left(\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}}\right)^2 + 2\beta\,\frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} + \gamma\right].$$

Il est bien aisé de voir que α_n, β_n, γ_n sont en valeur absolue, moindres que des nombres fixes. Soient en effet,

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = A + \frac{\varepsilon_{n-1}}{Q_{n-1}^2}, \qquad \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} = A + \frac{\varepsilon_{n-2}}{Q_{n-2}^2};$$

ε_{n-1}, ε_{n-2} sont moindres que 1, en valeur absolue (n° **35**); ces deux nombres sont d'ailleurs de signes contraires; en remplaçant dans les expressions de α_n, β_n, γ_n et en se rappelant que A est une racine de l'équation (1) on trouve

$$\alpha_n = 2(\alpha A + \beta)\,\varepsilon_{n-1} + \alpha\,\frac{\varepsilon_{n-1}^2}{Q_{n-1}^2},$$

$$\beta_n = (\alpha A + \beta)\left(\varepsilon_{n-1}\,\frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}} + \varepsilon_{n-2}\,\frac{Q_{n-1}}{Q_{n-2}}\right) + \alpha\,\frac{\varepsilon_{n-1}\,\varepsilon_{n-2}}{Q_{n-1}\,Q_{n-2}},$$

$$\gamma_n = 2(\alpha A + \beta)\,\varepsilon_{n-2} + \alpha\,\frac{\varepsilon_{n-2}^2}{Q_{n-2}^2},$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$|\alpha_n| < 2\,|\alpha A + \beta| + |\alpha|, \qquad |\gamma_n| < 2\,|\alpha A + \beta| + |\alpha|.$$

Quant à β_n, si l'on observe que $\dfrac{\varepsilon_{n-2}}{Q_{n-2}^2} = \dfrac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} - A$ est plus petit en valeur absolue que $\dfrac{1}{Q_{n-2}\,Q_{n-1}}$ (n° **35**), et que, par conséquent, $\varepsilon_{n-2}\dfrac{Q_{n-1}}{Q_{n-2}}$ est plus petit que 1 en valeur absolue, on voit tout de suite que l'on a

$$|\beta_n| < 2\,|\alpha A + \beta| + |\alpha|;$$

les nombres entiers α_n, $2\beta_n$, γ_n, devant rester inférieurs en valeur absolue à des nombres fixes, ne peuvent, lorsque l'on fait varier n, présenter qu'un nombre fini d'arrangements ; il faut donc que, pour une infinité de valeurs de n, on retombe sur la même équation du second degré, et que, par suite, deux quotients complets A_m et A_{m+p} soient la même racine de la même équation du second degré ; or l'égalité $A_{m+p} = A_m$ entraîne

$$a_{m+p} = a_m, \quad a_{m+p+1} = a_{m+1}, \quad \ldots, \quad a_{m+2p} = a_{m+p} = a_m, \quad \ldots$$

La périodicité de la suite des quotients incomplets est établie.

Par exemple en prenant $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = -2$, on voit que les valeurs absolues de α_n, γ_n devront être au plus égales à 3, celle de $2\beta_n$ au plus égale à 7.

Les valeurs trouvées plus haut pour α_n, γ_n, où l'on a déjà observé que ε_{n-1} et ε_{n-2} étaient de signes contraires, montrent que α_n et γ_n sont de signes contraires pour de grandes valeurs de n, car si on met ε_{n-1}, ε_{n-2} en facteurs, les facteurs restants

$$2(\alpha A + \beta) + \alpha\frac{\varepsilon_{n-1}}{Q_{n-1}^2}, \qquad 2(\alpha A + \beta) + \alpha\frac{\varepsilon_{n-2}}{Q_{n-2}^2},$$

sont du signe de $2(\alpha A + \beta) = \alpha(A - A')$, puisque les autres termes peuvent être supposés aussi petits qu'on veut. Cette observation jointe à l'identité

$$4\beta_n^2 - 4\alpha_n\gamma_n = (P_{n-1}Q_{n-2} - P_{n-2}Q_{n-1})^2(4\beta^2 - 4\alpha\gamma)$$
$$= 4\beta^2 - 4\alpha\gamma,$$

suffirait à montrer que les valeurs absolues des nombres entiers $2\beta_n$, $2\alpha_n$, $2\gamma_n$, dont les deux derniers sont de signes contraires, ne peuvent dépasser un nombre fixe, $4\beta^2 - 4\alpha\gamma$ par exemple, et par conséquent à établir la périodicité de la suite des quotients incomplets.

Cette périodicité résulte donc, ainsi que Hermite en a fait la remarque (¹), de ce que, pour des valeurs suffisamment grandes de n,

(¹) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. IX, p. 11.

l'équation (2) a ses racines de signes contraires ; or ce point résulte immédiatement de ce que les deux racines A_n, A'_n de cette équation sont liées aux racines A, A' de l'équation (1) par les relations

$$A_n = \frac{-Q_{n-2}A + P_{n-2}}{Q_{n-1}A - P_{n-1}},$$

$$A'_n = \frac{-Q_{n-2}A' + P_{n-2}}{Q_{n-1}A' - P_{n-1}} = -\frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1}^2\left[A' - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right]},$$

dont la seconde montre que, pour de grandes valeurs de n, $-\frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}}$ fournit une valeur très approchée de A'_n : en effet pour de grandes valeurs de n, $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ est voisin de A ; la différence entre A'_n et $-\frac{Q_{n-2}}{Q_{n-1}}$ peut s'écrire

$$\frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1}^2\left(A' - A - \frac{\varepsilon_{n-1}}{Q_{n-1}^2}\right)} ;$$

outre l'intérêt que ce résultat présente en lui-même, on voit, puisque les nombres Q_{n-1}, Q_{n-2} sont positifs, que A'_n est nécessairement négatif pour les grandes valeurs de n ; quant à A_n, qui est un quotient complet, il est sûrement positif pour $n \geqq 1$. On a ainsi une seconde démonstration de la périodicité.

42. — Mentionnons, pour terminer ce sujet, une autre observation de Hermite, relative à une proposition que l'on doit à Galois.

On a vu au commencement du numéro précédent que, si la période d'une fraction continue périodique commençait au premier terme et était formée des quotients incomplets $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, la valeur de cette fraction était racine de l'équation

$$Q_{n-1}x^2 + (Q_{n-2} - P_{n-1})x - P_{n-2} = 0 ;$$

cette équation a une seconde racine, comprise entre 0 et -1, comme on le voit en substituant ces deux nombres, à la place de x, dans l'équation précédente ; désignons cette seconde racine par $-\frac{1}{\xi}$, ξ étant un nombre positif plus grand que 1 ; ξ sera la ra-

cine positive de l'équation

$$P_{n-2}\xi^2 + (Q_{n-2} - P_{n-1})\xi - Q_{n-1} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\xi = \frac{P_{n-1}\xi + Q_{n-1}}{P_{n-2}\xi + Q_{n-2}};$$

or, on voit immédiatement, par les relations (1) du n° **34**, qui donnent

$$\frac{P_{n-1}}{P_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{P_{n-3}}{P_{n-2}}, \quad \ldots, \quad \frac{P_1}{P_0} = a_1 + \frac{1}{a_0},$$

$$\frac{Q_{n-1}}{Q_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{Q_{n-3}}{Q_{n-2}}, \quad \ldots, \quad \frac{Q_1}{Q_0} = a_1$$

que, si l'on développe en fractions continues limitées les fractions $\frac{P_{n-1}}{P_{n-2}}$, $\frac{Q_{n-1}}{Q_{n-2}}$, on trouve les quotients incomplets a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_1, a_0 pour la première, et a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1 pour la seconde ; en sorte que $\frac{Q_{n-1}}{Q_{n-2}}$ n'est autre que l'avant-dernière réduite de la fraction continue limitée formée au moyen de ces quotients incomplets a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_0, la dernière étant $\frac{P_{n-1}}{P_{n-2}}$; si donc, quel que soit le nombre ξ plus grand que 1, on développe $\frac{P_{n-1}\xi + Q_{n-1}}{P_{n-2}\xi + Q_{n-2}}$ en fraction continue, on trouvera d'abord les quotients incomplets a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_0, puis ceux qui proviendraient de la réduction de ξ en fraction continue ; si maintenant ξ vérifie l'égalité

$$\xi = \frac{P_{n-1}\xi + Q_{n-1}}{P_{n-2}\xi + Q_{n-2}},$$

il faut que le développement de ξ en fraction continue soit périodique, commence par a_n, et que la période soit formée des quotients incomplets a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0.

CHAPITRE II

ENSEMBLES INFINIS. SUITES INFINIES. LIMITES.

I. — ENSEMBLES INFINIS. BORNES SUPÉRIEURE ET INFÉRIEURE. POINTS D'ACCUMULATION

43. — On a déjà introduit au n° **16** la notion d'ensemble de nombres.

Je rappelle qu'un ensemble de nombres (E) est défini (ou donné) lorsque l'on définit (ou lorsque l'on donne) le moyen de reconnaître, quel que soit un nombre, si ce nombre appartient ou n'appartient pas à l'ensemble. On peut d'ailleurs raisonner sur un ensemble sans qu'il soit défini, pourvu qu'on le suppose déterminé, c'est-à-dire tel qu'on puisse affirmer, d'un nombre quelconque, qu'il appartient ou qu'il n'appartient pas à l'ensemble. Tous les nombres qui appartiennent à un ensemble sont supposés différents : l'un quelconque d'entre eux est dit un nombre de l'ensemble. Il n'est pas question, dans la définition d'un ensemble, d'un ordre quelconque attribué aux éléments.

L'ensemble (E) est *infini* si on peut affirmer qu'il contient plus de n nombres, quel que soit le nombre naturel n. Dans le cas contraire, il est *fini*. C'est surtout d'ensembles infinis qu'il sera question dans le présent chapitre.

Au lieu d'un ensemble (E) de *nombres*, je parlerai souvent d'un ensemble de points sur un axe : les deux notions sont identiques si l'on confond chaque nombre avec le point dont il est l'abscisse, chaque point de l'axe avec son abscisse. L'ensemble de points (E) est l'ensemble des points dont les abscisses sont les nombres de

l'ensemble (E). On désigne souvent un tel ensemble sous le nom d'ensemble linéaire.

44. — Un ensemble de nombres (E) est dit *borné en haut* (ou à droite) [1] quand il existe un nombre P auquel tous les nombres de l'ensemble sont inférieurs. Un ensemble est borné en bas (ou à gauche) quand il existe un nombre p auquel tous les nombres de l'ensemble sont supérieurs.

Quand un ensemble (E) est borné en haut, il existe un nombre M, la *borne supérieure* de l'ensemble, qui jouit des propriétés suivantes :

1° Aucun nombre de (E) n'est plus grand que M ;

2° Quel que soit le nombre M′ plus petit que M il y a un nombre de (E) qui est plus grand que M.

Ce nombre M est d'ailleurs unique.

S'il y a dans l'ensemble (E) un nombre qui soit plus grand que tous les autres nombres de cet ensemble, ce nombre-là est évidemment le nombre M : cette circonstance se présentera nécessairement si l'ensemble est fini.

On peut donc se limiter, dans la démonstration, au cas où, dans l'ensemble (E), borné en haut, il n'y a pas de nombre plus grand que tous les autres. C'est ce que je suppose dans ce qui suit.

Rangeons dans une première classe tout nombre rationnel qui est inférieur ou égal à un nombre de (E) et, dans une seconde classe les nombres rationnels qui sont plus grands que tous les nombres de (E) : il y a de tels nombres, puisque (E) est borné en haut.

Ce mode de séparation des nombres rationnels en deux classes définit (n° **10**) un nombre M rationnel ou irrationnel, dont on va prouver qu'il est la borne supérieure de l'ensemble, c'est-à-dire qu'il jouit des propriétés 1° et 2°.

Quel que soit le nombre A appartenant à (E), il y a dans la première classe un nombre plus grand que A ; en effet, il y a, par

(1) Cette dernière façon de parler est conforme à l'habitude qu'on a de se représenter les abscisses comme croissantes quand on s'avance vers la droite : tous les points qui appartiennent à l'ensemble, ou, si l'on veut, qui représentent les nombres de l'ensemble (E), sont alors en deçà (ou à gauche) du point P, ou du point dont l'abscisse est P.

hypothèse, dans (E) un nombre B plus grand que A et les nombres rationnels compris entre A et B doivent figurer dans la première classe.

Quel que soit le nombre a de la première classe, il y a dans (E) un nombre plus grand que a : en effet a a été rangé dans la première classe soit parce qu'il y avait dans (E) un nombre A plus grand que lui, soit parce qu'il était égal à un nombre A' de (E), dans ce dernier cas il y a dans (E) un nombre A plus grand que A' ou que a.

Il résulte de là qu'il n'y a pas dans la première classe un nombre a plus grand que tous les autres de la même classe, car les nombres rationnels compris entre a et le nombre A de l'ensemble qui lui est supérieur appartiennent à la première classe.

S'il y a dans la seconde classe un nombre plus petit que tous les autres de la même classe, c'est ce nombre là qui est le nombre M défini par la décomposition ; sinon le nombre M que définit cette décomposition est irrationnel.

Dans les deux cas la première classe constitue la classe inférieure relative au nombre M, et ce nombre M est plus grand que n'importe quel nombre A de (E), puisqu'il y a, dans la première classe, un nombre a qui est plus grand que A, et que M surpasse : le nombre M jouit de la propriété 1°.

Si M' est plus petit que M, il y a dans la première classe un nombre a plus grand que M', dans l'ensemble un nombre A plus grand que a, et par conséquent plus grand aussi que M'. Il y a même une infinité de nombres de l'ensemble qui sont plus grands que M', car s'il y en avait seulement n, entre le plus grand de ces n nombres et M il n'y aurait plus aucun nombre de (E). Remarquons toutefois que la démonstration de cette dernière propriété de la borne supérieure suppose qu'on soit dans le cas que l'on vient de traiter, où (E) ne contient point de nombre qui soit supérieur à tous les autres.

L'existence de la borne supérieure M de l'ensemble (E) est donc établie dans tous les cas, soit que cette borne appartienne à l'ensemble, dont elle est alors le plus grand nombre, soit qu'elle ne lui appartienne pas. Il est clair qu'un nombre plus grand ou plus petit que M ne peut jouir des propriétés qui ont servi à le définir : ce nombre M est unique. Si l'on sait d'un nombre M' qu'il est

plus grand que tous les nombres de (E), on peut affirmer que l'on a $M' \geqq M$.

De même, si un ensemble (E) est borné en bas, il existe un nombre m, la *borne inférieure* de (E), qui jouira des propriétés suivantes : tout nombre de (E) est supérieur ou égal à m ; quel que soit le nombre m' plus grand que m, il existe au moins un nombre de l'ensemble (E) qui est plus petit que m' : il en existe une infinité, si voisin que m' soit de m, lorsqu'il n'y a pas dans (E) un nombre qui soit plus petit que tous les autres ; lorsqu'il existe un tel nombre, c'est lui qui est la borne inférieure. Si un nombre m' est plus petit que tous les nombres de (E), on peut affirmer que l'on a $m' \leqq m$.

Par exemple, o est la borne inférieure de l'ensemble des nombres positifs, et la borne supérieure de l'ensemble des nombres négatifs.

Un ensemble *borné* (sans épithète) est un ensemble borné en haut et en bas.

45. — Le lecteur observera que cette notion de la borne supérieure ou inférieure d'un ensemble aurait pu être placée immédiatement après les définitions des nombres irrationnels, de l'égalité et de l'inégalité. Quoiqu'on n'ait pas dégagé jusqu'ici la généralité de cette notion, elle était le fond même des considérations du chapitre précédent. La définition d'un nombre irrationnel revient à considérer ce nombre comme la borne supérieure et la borne inférieure des ensembles de nombres rationnels qui constituent la classe inférieure et la classe supérieure. La définition de la somme de deux nombres A, B revient à regarder cette somme comme la borne supérieure de l'ensemble des nombres rationnels distincts que l'on obtient en ajoutant deux nombres rationnels moindres respectivement que A et B, et comme la borne inferieure de l'ensemble des nombres rationnels distincts que l'on obtient en ajoutant deux nombres rationnels respectivement plus grands que A et B. Cette définition conduit maintenant à la généralisation évidente que voici :

Si deux ensembles (E), (E') bornés en haut, ont pour bornes supérieures M, M', l'ensemble des nombres distincts que l'on peut former en ajoutant un nombre de (E) et un nombre de (E') a pour

borne supérieure M + M'. Une proposition analogue concernerait les bornes inférieures.

De même, en conservant les mêmes notations, mais en supposant que les éléments de (E), (E') soient des nombres positifs, on voit que l'ensemble des nombres distincts obtenus en multipliant un élément de (E) par un élément de (E') admet le produit MM' comme borne supérieure.

46. — Les propositions que voici sont tout aussi évidentes : convenons de dire que l'ensemble (E') est *contenu* dans l'ensemble (E), ou que l'ensemble (E) contient l'ensemble (E'), lorsque tout élément de (E') appartient à (E). Si l'ensemble (E) est borné en haut et contient l'ensemble (E'), ce dernier est aussi borné en haut et sa borne supérieure est au plus égale à la borne supérieure de (E). Si l'ensemble (E) est borné en bas et contient l'ensemble (E'), celui-ci est borné en bas et sa borne inférieure est au moins égale à celle de (E).

47. — Soient (E), (E') deux ensembles dont on sait que tout nombre de (E) est inférieur à tout nombre de (E') : (E) est certainement borné en haut, soit M sa borne supérieure ; (E') est de même borné en bas, soit m' sa borne inférieure. On aura $m' \geqq M$: Si l'on avait en effet $m' < M$, il y aurait un nombre A' de (E') qui serait inférieur à M ; contrairement à l'hypothèse, il y aurait donc un nombre A de l'ensemble (E) supérieur au nombre A' de l'ensemble (E'). Ainsi la différence entre un nombre appartenant à (E') et un nombre appartenant à (E) est au moins égale à $m' - M$.

Si donc on peut trouver dans (E) et dans (E') des nombres aussi voisins qu'on le veut, on peut être certain que l'on a $m' = M$. On a considéré au n° **17** deux ensembles de nombres rationnels qui étaient dans ce cas, le nombre qu'ils servaient à définir n'était autre que la borne supérieure de l'un, la borne inférieure de l'autre.

48. — Si un ensemble (E) est borné (en haut et en bas), il admet une borne supérieure M, une borne inférieure m ; la différence M — m est un nombre positif, qui ne pourrait être nul que si l'ensemble E se réduisait au seul nombre $M = m$; on voit de

suite que $M - m$ est la borne supérieure de l'ensemble des nombres distincts obtenus en prenant la valeur absolue de la différence de deux nombres qui appartiennent tous les deux à (E). J'appellerai $M - m$ *écart* de l'ensemble (E); j'emploierai aussi les mots « écart de deux nombres a, b » pour désigner la valeur absolue de la différence $a - b$.

On appelle intervalle de deux nombres distincts a, b, et l'on désigne par (a, b) l'ensemble des nombres a, b et de tous les nombres réels compris entre a et b; le plus petit des nombres a, b est la borne inférieure de cet ensemble; le plus grand en est la borne supérieure; l'écart de l'intervalle, ou de l'ensemble, est le nombre positif $|b - a|$.

Ces diverses dénominations se justifient pleinement quand on substitue les points aux nombres; soit que l'on attribue une réalité à la représentation géométrique, soit qu'on la regarde (n° **28**) comme une simple façon de parler, capable de soulager la pensée par les images concrètes qu'elle rappelle.

Un ensemble de points borné à droite a tous ses points en deçà d'un certain point de l'axe. Il existe un point M, la borne supérieure ou la *borne de droite*, tel qu'aucun point de l'ensemble ne soit au delà de M et tel que si M′ est un point quelconque en deçà de M, il y ait certainement un point de l'ensemble au-delà de M′; si M ne fait pas partie de l'ensemble, il y a une infinité de points de l'ensemble aussi voisins de M que l'on voudra. De même pour la borne inférieure (ou de gauche), si l'ensemble de points est borné à gauche.

Un intervalle (a, b) n'est autre chose que le segment de droite dont les extrémités sont les points d'abscisse a, b ou plus brièvement les points a, b. Un point (ou un nombre) *appartient* à cet intervalle, s'il est, soit a, soit b, soit compris entre a et b; il est *intérieur* à cet intervalle, s'il est compris entre a et b. Le centre de l'intervalle est le point $\frac{a+b}{2}$.

Un ensemble borné en haut et en bas (à droite et à gauche), dont les bornes supérieure et inférieure sont M, m est figuré par des points appartenant à l'intervalle (m, M), etc.

Je continuerai, dans ce qui suit à employer le langage géométrique, et j'emploierai indifféremment les mots « point » ou « nombre ».

49. — Un *point d'accumulation* d'un ensemble infini (E) est un point, qui peut d'ailleurs appartenir ou ne pas appartenir à (E), mais aux environs duquel se trouvent une infinité de points de (E). D'une façon plus précise a sera un point d'accumulation de (E) si, quelque petit que soit le nombre positif ε, il y a dans (E) un point autre que a, dont la distance au point a est moindre que ε; s'il en est ainsi, on peut affirmer qu'il y a dans (E) une infinité de points dont la distance à a est moindre que ε, car s'il y en a seulement p, soit a_p celui de ces points qui s'écarte le moins de a : il n'y aurait pas dans (E) de point, autre que a, dont la distance à a fût moindre que $|a - a_p|$; a ne serait pas un point d'accumulation.

On peut présenter les choses un peu différemment : soit a un nombre ou un point quelconque ; l'ensemble des distances du point a aux points de (E), autres que a, est borné en bas, puisque toutes ces distances sont des nombres positifs ; si la borne inférieure de cet ensemble des distances est o, le point a est un point d'accumulation de (E), si la borne inférieure est le nombre positif μ, le point a n'est pas un point d'accumulation et l'on peut affirmer que la distance à a d'un point quelconque de (E), autre que a, est au moins égale à μ ; en d'autres termes, si l'on regarde a comme le centre d'un intervalle dont l'écart soit moindre que 2μ, il n'y aura pas dans cet intervalle de point appartenant à (E) autre que a ; au contraire, si a est un point d'accumulation, tout intervalle, si petit qu'il soit, dont a est le centre, contient une infinité de points de (E).

Par exemple, o est un point d'accumulation de l'ensemble des fractions dont le numérateur est 1 et le dénominateur un nombre naturel : il n'appartient pas à cet ensemble.

Lorsqu'un ensemble infini est borné en haut, sa borne supérieure est certainement un point d'accumulation de cet ensemble quand elle ne lui appartient pas : elle peut d'ailleurs être un point d'accumulation, tout en lui appartenant. De même pour la borne inférieure, quand l'ensemble est borné en bas.

50. — Un ensemble infini (E) borné en haut et en bas, admet au moins un point d'accumulation appartenant à l'intervalle (m, M) des bornes inférieure et supérieure de l'ensemble.

Tous les points de (E) appartiennent à l'intervalle (m, M). Écar-

tons le cas où m serait un point d'accumulation de (E), cas où le théorème se trouverait vérifié par hypothèse, et soit a un point quelconque de l'intervalle (m, M), autre que m ; il peut y avoir un nombre fini ou infini de points de l'ensemble (E) qui appartiennent à l'intervalle (m, a) ; il y en a un nombre fini, si a est suffisamment voisin de m, sans quoi, m serait un point d'accumulation, il y en a une infinité si a est égal à M ; soit (A) l'ensemble des points a tels que dans l'intervalle (m, a) il y ait un nombre fini de points appartenant à l'ensemble (E) ; d'après ce qu'on vient de dire, (A) est borné en haut : soit α sa borne supérieure, qui est au plus égale à M ; si petit que soit le nombre positif ε, dans l'intervalle $(m, \alpha - \varepsilon)$ il n'y a qu'un nombre fini de points appartenant à (E) ; il y en a au contraire une infinité dans l'ensemble $(m, \alpha + \varepsilon)$, car, autrement, il y aurait dans (A) un nombre $\alpha + \varepsilon$ supérieur à α ; il y a donc une infinité de points de (E) qui appartiennent à l'intervalle $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$; par conséquent, α est un point d'accumulation de l'ensemble (E).

51. — Si un ensemble (E) a pour bornes inférieure et supérieure les nombres m, M, tout point d'accumulation de cet ensemble appartient à l'intervalle (m, M).

La distance d'un point de l'ensemble (E) à un point d'accumulation de cet ensemble est au plus égale à $M - m$. Il en est de même de la distance de deux points d'accumulation de (E).

Il est clair qu'on n'altère pas les points d'accumulation d'un ensemble infini (E) en supprimant de cet ensemble, ou en introduisant dans cet ensemble un nombre fini d'éléments. J'entends par là que si (E_1) est l'ensemble infini que l'on déduit de (E) en en supprimant certains éléments, en nombre fini, ou en y introduisant certains éléments, en nombre fini, les points d'accumulation de (E_1) sont les mêmes que les points d'accumulation de (E).

Si l'ensemble (E') est contenu dans l'ensemble (E), tout point d'accumulation de (E') est un point d'accumulation de (E). On ne peut pas affirmer que, réciproquement, tout point d'accumulation de (E) soit un point d'accumulation de (E').

Si l'ensemble (E) est borné (en haut et en bas) et n'a qu'un nombre fini p de points d'accumulation $a_1, a_2, \ldots, a_p$, si l'on regarde ces points comme les centres respectifs de p intervalles, d'ail-

leurs aussi petits qu'on voudra, il n'y aura en dehors de ces intervalles qu'un nombre fini de points de (E). Soit en effet 2ρ l'écart du plus petit intervalle : l'ensemble (E_1) des points de (E) qui sont situés en dehors de ces intervalles est évidemment borné, puisqu'il est contenu dans (E) ; s'il était infini, il admettrait au moins un point d'accumulation α qui serait aussi un point d'accumulation de (E) et par conséquent l'un des points a_1, $a_2, \ldots, a_p$: or la distance d'un point quelconque de (E_1), à l'un quelconque de ces points est supérieure à ρ, puisque tous les points de (E_1) sont en dehors des p intervalles.

Si l'on fait rentrer dans un ensemble les points d'accumulation qui ne lui appartiennent pas, il est clair qu'on ne modifie pas les bornes de cet ensemble.

Les notions de borne supérieure ou inférieure et de point d'accumulation sont fondamentales dans la théorie des ensembles de nombres (ou de points). Avant d'aller plus loin dans cette théorie, il convient d'insister sur la notion de limite.

II. — SUITES INFINIES. LIMITES

52. — On dit qu'une suite de nombres

$$(u) \qquad u_1, \quad u_2, \quad \ldots \quad u_n, \quad \ldots,$$

est déterminée quand le nombre qui figure à un rang déterminé est déterminé ; elle est définie (ou donnée) quand on définit (ou que l'on donne) le moyen de calculer un terme quelconque u_n connaissant son rang n.

En disant qu'une telle suite a une limite A, on veut dire que les termes de cette suite deviennent aussi voisins du nombre A qu'on le veut, pourvu que leur rang soit suffisamment grand. D'une façon précise, on dira que la suite (u) a pour limite A, ou mieux que u_n, pour n infini, a pour limite A, et l'on écrira

$$\lim_{n=\infty} u_n = A,$$

si, quelque petit que soit le nombre positif ε, on peut lui faire correspondre un nombre naturel p tel que l'on ait $|u_n - A| < \varepsilon$ pour tous les entiers n supérieurs à p. S'il en est ainsi, tous les termes u_n de la suite appartiennent à l'intervalle $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ lorsque n est plus grand que p ; quelques-uns des termes u_1, $u_2, \ldots, u_p$ peuvent d'ailleurs appartenir à cet intervalle : en tous cas, les termes de la suite qui n'appartiennent pas à cet intervalle sont en nombre fini. Réciproquement, s'il existe un nombre A tel que, quelque soit le nombre positif ε, le nombre de termes de la suite (u) qui n'appartiennent pas à l'intervalle $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ soit toujours fini, la suite a pour limite le nombre A ; car si l'on se donne ε, et si l'on désigne par p le nombre de termes de la suite qui n'appartiennent pas à l'intervalle $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, u_n appartiendra certainement à cet intervalle si n est plus grand que p et l'on aura $|u_n - A| < \varepsilon$ sous la condition $n > p$.

Une suite (u) ne peut avoir deux limites distinctes A, B, car si la suite (u) a pour limite A et si l'on prend $\varepsilon = \frac{|A - B|}{2}$, tous les termes de la suite, à partir d'un certain rang, appartiendront à l'intervalle $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ et leur différence avec B sera au moins égale à $\frac{|A - B|}{2}$.

Les deux égalités $\lim\limits_{n=\infty} u_n = A$, $\lim\limits_{n=\infty} (u_n - A) = 0$ ont le même sens.

Voici quelques exemples de limites :

Un nombre A peut être regardé comme la limite de la suite des valeurs approchées de A à $\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \ldots, \frac{1}{10^n}, \ldots$ près, par défaut, ou de la suite des valeurs approchées de A à $\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \ldots, \frac{1}{10^n}, \ldots$, près, par excès.

La suite $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ a pour limite 0.

La suite $1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots$ a pour limite 1, puisque la différence $1 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$ sera plus petite que ε pour $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Si l'on considère une fraction continue illimitée qui définisse le nombre A, dont les quotients incomplets forment la suite a_0,

$a_1, \ldots, a_n, \ldots,$ et dont les réduites successives soient les nombres $\frac{P_0}{Q_0}, \frac{P_1}{Q_1}, \ldots, \frac{P_n}{Q_n}, \ldots$ chacune des suites

$$\frac{P_0}{Q_0}, \quad \frac{P_1}{Q_1}, \quad \ldots, \quad \frac{P_n}{Q_n}, \quad \ldots,$$

$$\frac{P_0}{Q_0}, \quad \frac{P_2}{Q_2}, \quad \ldots, \quad \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}, \quad \ldots,$$

$$\frac{P_1}{Q_1}, \quad \frac{P_3}{Q_3}, \quad \ldots, \quad \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}, \quad \ldots$$

aura pour limite A ; la différence entre A et le n^e terme de cette suite est alternativement positive et négative pour la première ; elle est toujours positive pour la seconde, toujours négative pour la troisième ; dans tous les cas, la valeur absolue de cette différence peut être supposée aussi petite qu'on le veut, pourvu que n soit suffisamment grand.

53. — Si la suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ n'a pas A pour limite, au sens qu'on vient de dire, on peut affirmer qu'il existe un nombre positif α jouissant de la propriété suivante : quel que soit le nombre positif p, il y a un nombre naturel $n > p$, tel que l'on ait $|u_n - A| \geqq \alpha$: en effet, nier l'existence d'un tel nombre, c'est affirmer que, quel que soit le nombre positif α, on peut lui faire correspondre un entier p tel que l'on ait $|u_n - A| < \alpha$ pour toutes les valeurs de n supérieures à p, c'est donc affirmer que la suite a A pour limite. On exprime la même chose en disant que si la suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ n'a pas A pour limite, il y a, dans cette suite, une infinité de termes u_n tels que l'on ait $|u_n - A > |\alpha|$.

54. — Si les deux suites

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots,$$
$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_n, \quad \ldots$$

ont respectivement pour limites les nombres A, B, en d'autres termes, si l'on a

$$\lim_{n=\infty} u_n = A, \qquad \lim_{n=\infty} v_n = B,$$

à chaque système de nombres positifs ε, η, si petits qu'ils soient,

on peut faire correspondre un entier positif m tel que l'on ait à la fois

$$|u_n - A| < \varepsilon, \qquad |v_n - B| > \eta$$

sous la condition $n > m$; on peut en effet faire correspondre à ε l'entier p, à η l'entier q tels que la première inégalité soit vérifiée pour $n > p$, la seconde pour $n > q$; on prendra pour m le plus grand des nombres p, q. Le lecteur étendra de lui-même ce théorème au cas de trois, quatre, ..., d'un nombre fini quelconque de suites, ayant des limites A, B, C, ...

Si l'on a

$$\lim_{n=\infty} u_n = A, \qquad \lim_{n=\infty} v_n = B,$$

on aura

$$\lim_{n=\infty} (u_n + v_n) = A + B,$$
$$\lim_{n=\infty} (u_n - v_n) = A - B,$$
$$\lim_{n=\infty} (u_n v_n) \quad = AB,$$
$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \quad = \frac{A}{B};$$

la dernière égalité toutefois suppose essentiellement que B ne soit pas nul : c'est la seule que je démontrerai, après avoir fait l'observation suivante.

Il peut se faire que dans la suite

$$\frac{u_1}{v_1}, \quad \frac{u_2}{v_2}, \quad \ldots, \quad \frac{u_n}{v_n}, \quad \ldots,$$

dont il faut démontrer qu'elle a pour limite $\frac{A}{B}$, certains termes, dont le dénominateur se trouverait être nul, n'aient pas de sens : il est sous-entendu qu'on n'en tient aucun compte et que c'est de la suite débarrassée de ces termes que l'on s'occupe : tout d'abord, cette circonstance ne peut se présenter qu'au commencement de la suite ; en s'avançant assez loin, elle ne se présente plus, lorsque, comme on l'a supposé, B n'est pas nul ; si, en effet, on désigne par B' un nombre positif plus petit que $|B|$ et par p un entier positif tel que l'on ait, pour $n > p$,

$$|B - v_n| < |B| - B',$$

on aura [1] nécessairement $|v_n| > B'$, en sorte que v_n ne pourra pas être nul.

Venons maintenant à la démonstration de la proposition annoncée :

Soient, en général,

$$u_n = A + \varepsilon_n, \qquad v_n = B + \eta_n, \qquad \frac{u_n}{v_n} - \frac{A}{B} = \frac{B\varepsilon_n - A\eta_n}{B(B + \eta_n)};$$

quel que petit que soit le nombre positif α plus petit que $|B| - B'$, on peut supposer le nombre entier p assez grand pour que l'on ait $|\varepsilon_n| < \alpha$, $|\eta_n| < \alpha$, sous la condition $n > p$.

On aura alors

$$|B + \eta_n| > |B| - \alpha > B'$$

et

$$\left|\frac{u_n}{v_n} - \frac{A}{B}\right| < \frac{|A| + |B|}{B'^2}\alpha;$$

si l'on veut que le premier membre soit moindre que ε, sous la condition $n > p$, il suffira d'avoir choisi

$$\alpha = \frac{B'^2\varepsilon}{|A| + |B|}.$$

On remarque qu'il n'y aurait rien à changer à ce qui précède pour démontrer que, quelque petit que soit le nombre positif ε, on peut lui faire correspondre un entier p tel que, sous les conditions $n > p$, $m > p$, on ait

$$\left|\frac{u_m}{v_n} - \frac{A}{B}\right| < \varepsilon.$$

Les propositions du présent numéro, appliquées plusieurs fois, conduisent immédiatement à la proposition suivante :

Si l'on a

$$\lim_{n=\infty} u_n = A, \qquad \lim_{n=\infty} v_n = B, \qquad \lim_{n=\infty} w_n = C,$$

quels que soient les deux polynomes $\varphi(u, v, w,)$ $\psi(u, v, w)$,

[1] Il n'est peut-être pas inutile d'observer que si α, β, γ sont trois nombres positifs quelconques, l'une quelconque des inégalités $|\pm\alpha \pm \beta| < \gamma$, entraîne les inégalités

$$\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma, \qquad \alpha - \gamma < \beta < \alpha + \gamma.$$

pourvu que ψ (A, B, C) ne soit pas nul, on aura

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(u_n, v_n, w_n)}{\psi(u_n, v_n, w_n)} = \frac{\varphi(A, B, C)}{\psi(A, B, C)}.$$

Au lieu de trois suites, on aurait pu aussi bien considérer quatre, cinq, ... suites et des polynomes à quatre, cinq, ... variables.

55. — Il y a un intérêt évident, étant donnée une suite infinie

$$(u) \qquad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots,$$

à savoir reconnaître si cette suite a une limite ou non.

Considérons, en même temps que cette suite, l'ensemble (U) des nombres distincts qui y figurent : je dirai de la suite qu'elle est bornée, ou qu'elle n'est pas bornée, suivant que l'ensemble (U) est borné ou n'est pas borné. L'ensemble (U) est en général infini : pour qu'il en soit autrement, il est évidemment nécessaire que la suite (u) contienne une infinité de termes égaux : écartons provisoirement de nos raisonnements les suites de cette nature.

Supposons que la suite (u) ait une limite A ; elle est alors bornée, puisque, quel que soit le nombre positif ε, ses termes sont, sauf un nombre fini d'entre eux, a, b, c, ..., l, tous compris dans l'intervalle (A — ε, A + ε), en sorte que la valeur absolue de l'un quelconque de ses termes est au plus égale au plus grand des nombres $|a|$, $|b|$, $|c|$, ..., $|l|$, $|A - \varepsilon|$, $|A + \varepsilon|$.

D'autre part, et pour la même raison, le point A est un point d'accumulation de (U) et il est le seul : il faut bien en effet qu'il y ait dans l'intervalle (A — ε, A + ε) une infinité de points de (U), puisque, en dehors de cet intervalle, il ne s'en trouve qu'un nombre fini ; puis, tout point d'accumulation de (U) appartient nécessairement à cet intervalle et, par conséquent, coïncide avec A, puisque ε peut être supposé aussi petit qu'on le veut.

Réciproquement, si l'ensemble (U) des nombres distincts qui se trouvent dans (u) est borné et s'il admet un point d'accumulation unique A, ce point ou ce nombre A est la limite de la suite (u). En effet, si A est un point d'accumulation de (U), il y aura, en désignant par ε un nombre positif quelconque, une infinité d'éléments de l'ensemble, ou de termes de la suite, qui appartiendront

à l'intervalle $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$; ceux des points de l'ensemble qui sont en dehors de cet intervalle sont en nombre fini (n° **51**), et, par conséquent (n° **52**), A est la limite de la suite (u).

Ainsi, pour que la suite (u), dont on suppose qu'elle ne contient pas un nombre infini de termes égaux entre eux, ait une limite, il faut et il suffit que l'ensemble (U) soit borné et admette un point d'accumulation unique ; ce point est la limite de la suite.

Si la suite (u) contient une infinité de termes égaux à un nombre A, elle ne peut évidemment avoir d'autre limite que ce nombre. On fera rentrer toutes les suites dans un même énoncé en convenant d'appeler *point d'accumulation d'une suite* (u) soit un point d'accumulation de l'ensemble (U) des termes distincts de cette suite, soit un nombre qui figurerait une infinité de fois dans la suite (u) : on pourra dire alors :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite ait une limite est qu'elle soit bornée et n'admette qu'un point d'accumulation.

Observons en effet que si A est un point d'accumulation d'une suite infinie quelconque (u), on peut affirmer que, quelque soit le nombre positif ε, il y a une infinité de termes de la suite qui appartiennent à l'intervalle $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, soit parce que A est un point d'accumulation de l'ensemble (U) des termes distincts de (u), soit parce qu'il y a dans cette suite une infinité de termes égaux à A. Si la suite n'admet pas d'autre point d'accumulation, et si elle est bornée, il n'y a en dehors de cet intervalle qu'un nombre fini de termes : en effet, d'une part, il ne peut y avoir en dehors de cet intervalle qu'un nombre fini d'éléments distincts de l'ensemble (U), sans quoi cet ensemble admettrait un second point d'accumulation ; d'autre part il ne peut y avoir en dehors de l'intervalle un terme qui soit répété une infinité de fois dans la suite, puisque ce terme devrait alors être regardé comme un point d'accumulation, non de l'ensemble, mais de la suite : le raisonnement qui a servi dans le cas où on avait affaire à une suite ne contenant pas une infinité de termes égaux s'applique donc encore.

56. — Voici une autre forme de la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ ait une limite.

Supposons que cette limite existe et soit égale à A ; quel que soit le nombre positif ε on peut lui faire correspondre un entier p tel que l'on ait $|A - u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ sous la condition $n > p$. Si donc n et m sont supérieurs à p, on aura $|u_n - u_m| < \varepsilon$ puisque l'on a évidemment $|u_n - u_m| \leq |u_n - A| + |A - u_m|$.

Réciproquement, si à chaque nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre naturel p tel que l'on ait $|u_m - u_n| < \varepsilon$ sous la seule condition que m et n soient supérieurs à p, on peut affirmer que la suite (u) a une limite.

Cela est évident s'il y a dans la suite une infinité de termes égaux à un nombre A, puisqu'on pourra toujours prendre $u_m = A$.

S'il en est autrement, comme je le suppose dans ce qui suit, la suite (u) comprend une infinité de nombres distincts, qui forment un ensemble infini (U). Cet ensemble est borné, car si l'on suppose $m > p$, tous les termes de la suite sont compris dans l'intervalle $(u_m - \varepsilon, u_m + \varepsilon)$, sauf un nombre fini de termes pris dans la suite limitée $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$. L'ensemble (U) admet un point d'accumulation qui appartient nécessairement à l'intervalle $(u_m - \varepsilon, u_m + \varepsilon)$, intervalle dont l'écart est 2ε : il est donc impossible que l'ensemble (U) admette deux points d'accumulation distincts A, A', puisque la distance de ces deux points devrait être au plus égale au nombre positif 2ε, qui peut être supposé aussi petit qu'on le veut. Donc :

La condition nécessaire et suffisante pour que la suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ ait une limite est que l'on puisse faire correspondre à chaque nombre positif ε un nombre naturel p tel que l'on ait, sous la seule condition que les nombres naturels n et m soient supérieurs à p, $|u_m - u_n| < \varepsilon$.

On observera que si cette condition est vérifiée, on peut prendre pour valeur approchée de la limite, un terme quelconque u_m $(m > p)$: l'erreur commise est alors au plus égale à ε.

Si la suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ n'a pas de limite, on peut affirmer l'existence d'un nombre positif α, tel que, pour une infinité de couples de nombres n, m, on ait $|u_n - u_m| > \alpha$; le raisonnement est le même qu'au n° **53**.

57. — Considérons une suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ telle que chaque

terme soit égal ou supérieur à ceux qui le précèdent ; autrement dit, on a $u_{n+1} \geqq u_n$, quel que soit n ; si tous les termes sont inférieurs à un nombre fixe A, la suite a une limite. En effet, l'ensemble (U) des nombres distincts qui appartiennent à la suite est borné ; sa borne inférieure est u_1, sa borne supérieure α est inférieure ou égale à A. Soit ε un nombre positif quelconque, il y a certainement un nombre de (U), un terme de la suite (u), qui est plus grand que $\alpha - \varepsilon$; soit u_p un pareil terme : les termes suivants, supérieurs ou égaux à u_p, seront aussi plus grands que $\alpha - \varepsilon$; aucun de ces termes ne pouvant dépasser α, on aura $\alpha - u_n < \varepsilon$, sous la condition $n > p$: la suite a pour limite sa borne supérieure.

Si une suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ est telle que chaque terme soit égal ou inférieur à ceux qui le précèdent ; autrement dit, si l'on a $u_{n+1} \leqq u_n$, quel que soit n, et si tous les termes sont supérieurs à un nombre fixe B, la suite a une limite, qui est, cette fois, la borne inférieure de l'ensemble (U) des nombres distincts qui figurent dans la suite. Cette limite est inférieure ou égale à B. La démonstration est la même. Au surplus on ramènerait ce cas au précédent, en changeant tous les termes de signe.

58. — Si l'on considère deux suites

$$(u) \qquad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots,$$
$$(v) \qquad v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_n, \quad \ldots,$$

et si, d'une part, les termes de la première suite sont tous inférieurs ou égaux à un terme quelconque de la seconde suite ; si, d'autre part, on a $\lim_{n=\infty} (v_n - u_n) = 0$, les deux suites ont une limite et cette limite est la même pour les deux suites.

Soient (U), (V) les ensembles formés respectivement par les termes distincts de la suite (u) et les termes distincts de la suite (v). Chaque élément du premier ensemble est, par hypothèse, inférieur ou égal à un élément quelconque du second ; d'ailleurs, à cause de la condition $\lim. (u_n - v_n) = 0$, il y a des nombres pris l'un dans (U), l'autre dans (V) qui diffèrent aussi peu qu'on le veut. Il suit de là (nº **47**), que la borne supérieure de (U) est égale à la borne inférieure de (V) : soit A cette borne commune et ε un

nombre positif quelconque ; soit p un nombre entier tel que l'on ait $v_n - u_n < \varepsilon$, sous la condition $n > p$. Les inégalités

$$u_n \leqq A \leqq v_n, \qquad v_n - u_n < \varepsilon,$$

entraînent

$$0 \leqq A - u_n < \varepsilon, \qquad 0 \leqq v_n - A < \varepsilon;$$

la proposition est démontrée.

Les intervalles tels que (u_n, v_n), dont les bornes inférieure et supérieure sont deux termes correspondants des suites (u), (v), peuvent évidemment être caractérisés de la façon suivante :

1° La borne inférieure de l'un quelconque de ces intervalles est inférieure ou égale à la borne supérieure de l'un quelconque d'entre eux.

2° L'écart de l'intervalle (u_n, v_n) tend vers zéro quand n augmente indéfiniment.

Réciproquement si l'on considère une suite infinie d'intervalles

$$(u_1, v_1), \qquad (u_2, v_2), \dots \qquad (u_n, v_n), \dots$$

qui satisfassent à ces deux conditions, il est clair que les deux suites formées l'une, par les bornes inférieures, l'autre par les bornes supérieures satisferont aux conditions imposées aux suites (u), (v) du présent numéro en sorte qu'il existera un nombre A tel que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} u_n = \lim_{n=\infty} v_n = A;$$

ce nombre A appartient à l'un quelconque des intervalles (u_1, v_1), (u_2, v_2)....

Il y a plus, si l'on considère une suite quelconque $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, dont on sache seulement que x_n appartient à l'intervalle (u_n, v_n), quel que soit n, on peut affirmer que l'on a

$$\lim_{n=\infty} x_n = A;$$

en effet l'écart entre A et x_n, qui appartiennent tous deux à l'intervalle (u_n, v_n), est moindre que $v_n - u_n$.

La connaissance des deux suites (u), (v) pour déterminer le

nombre A offre ceci de précieux qu'un terme quelconque u_n de la première suite, un terme quelconque v_p de la seconde suite peuvent être pris pour valeurs approchées de A, l'une par défaut, l'autre par excès ; la différence entre ces deux valeurs fournit une limite supérieure de l'erreur commise.

Un cas fréquent est celui où les suites (u), (v), outre qu'elles satisfont aux conditions imposées, sont telles que l'on ait, quelque soit n,

$$u_{n+1} \geq u_n, \qquad v_{n+1} \leq v_n;$$

l'existence de la limite, pour l'une ou l'autre résulte alors du n° **57**.

Telles sont les suites que l'on déduit d'un symbole écrit comme un nombre décimal qui aurait une infinité de chiffres, la première en prenant successivement un, deux, trois,... chiffres décimaux, la seconde en *forçant* le dernier chiffre dans chacun des termes de la première suite (n° **18**).

Telles sont encore les deux suites

$$\frac{P_0}{Q_0}, \quad \frac{P_2}{Q_2}, \quad \frac{P_4}{Q_4}, \ldots,$$

$$\frac{P_1}{Q_1}, \quad \frac{P_3}{Q_3}, \quad \frac{P_5}{Q_5}, \ldots,$$

déduites d'une fraction continue illimitée (n° **38**) en prenant les réduites de rang pair et les réduites de rang impair.

59. — Examinons maintenant ce qui arrive si la suite infinie

$$(u) \qquad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

n'a pas de limite.

Si la suite (u) n'a pas de limite, c'est qu'elle n'est pas bornée, ou qu'elle a plus d'un point d'accumulation (n° **55**).

1° Supposons que la suite (u) ne soit pas bornée : alors, quel que soit le nombre positif A, et quel que soit le nombre naturel p, il y a dans la suite, après le terme u_p, un terme u_n plus grand que A en valeur absolue ; sinon, en effet, l'ensemble (U) serait borné, puisque tous ses éléments seraient inférieurs ou égaux en valeur absolue au plus grand des nombres $|u_1|$, $|u_2|$,... $|u_n|$, A. Après le terme u_p, il y a de même un terme u_q, plus grand que A en

valeur absolue : il y en a encore un autre après $u_q, \dots$: il y a, après u_r, une infinité de termes plus grands que A en valeur absolue. Si l'on savait que la suite (u) n'est pas bornée en haut, on pourrait affirmer en vertu du même raisonnement, qu'il y a dans la suite, après tel terme que l'on veut, une infinité de termes qui sont plus grands que A.

2° Si la suite (u) admet un point d'accumulation a, on sait que quelque petit que soit le nombre positif ε, il y a une infinité de termes de la suite dans l'intervalle $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$; il y en a donc une infinité après un terme quelconque u_n ; en sorte que si la suite a plusieurs points d'accumulation, on peut affirmer que, après chaque terme, il s'en trouve qui sont aussi rapprochés que l'on voudra de tel point d'accumulation que l'on veut ou encore, si la suite n'est pas bornée, qui sont aussi grands que l'on veut en valeur absolue.

60. — Parmi les suites qui ne sont pas bornées, il convient de distinguer celles qui jouissent de la propriété suivante : quelque grand que soit le nombre positif A, on peut lui faire correspondre un nombre naturel p tel que l'on ait $u_n > A$, sous la condition $n > p$. Pour exprimer que la suite (u) jouit de la propriété qu'on vient de dire, j'écrirai, suivant un usage commode et très répandu

$$\lim_{n=\infty} u_n = +\infty.$$

Je dirai aussi que u_n croît indéfiniment avec n, ou encore que u_n tend (¹) vers $+\infty$.

Les suites de cette nature ont, à cause de la façon régulière dont leurs termes croissent, quelque chose de commun avec les suites qui admettent une limite : elles n'en admettent évidemment pas, au sens qui a été donné à ce mot au n° **52** ; rien, à la vérité, n'aurait empêché de modifier la définition adoptée alors, de dire *limite finie* partout où l'on a dit limite, et de dire que u_n a pour limite $+\infty$, pour signifier que, quelque grand que soit le nombre A, on peut lui faire correspondre un entier p, tel que l'inéga-

(¹) L'expression tendre vers l'infini a été longtemps rejetée du langage mathématique comme incorrecte ; il me paraît qu'on peut l'adopter pourvu qu'on l'entende d'une façon précise.

lité $n > p$, entraîne l'inégalité $u_n > A$. L'ennui d'accoler presque toujours l'épithète « finie » au mot limite et de choquer des habitudes invétérées, comme celle qui consiste à dire, dans le cas qui nous occupe, que u_n croît au delà de toute limite, m'a décidé à adopter le mode de langage qui est d'ailleurs le plus répandu, bien qu'il semble, d'un autre côté, assez singulier de ne pas oser *dire* que u_n a une limite infinie, ou a l'infini pour limite, quand on *écrit* $\lim_{n=\infty} u_n = +\infty$. Mais ce qui importe par dessus tout, c'est de préciser le langage et les notations.

De même, j'écrirai $\lim_{n=\infty} u_n = -\infty$, et je dirai que u_n tend vers $-\infty$, pour signifier que, quelque grand en valeur absolue que soit le nombre négatif A, on peut lui faire correspondre un entier p tel que l'on ait $u_n < A$, sous la condition $n > p$.

Il est clair que la supposition $\lim_{n=\infty} u_n = \pm\infty$ entraîne la conclusion $\lim_{n=\infty} \frac{1}{u_n} = 0$.

61. — Si la suite (u) n'est pas bornée en haut, on peut en extraire une suite infinie de termes $v_1, v_2, \dots, v_p, \dots$ dont les rangs $n_1, n_2, \dots, n_p, \dots$, qu'ils occupent respectivement dans la suite (u), aillent en croissant, et tels que l'on ait $\lim_{p=\infty} v_p = +\infty$.

Soit en effet

$$(a) \qquad a_1, a_2, \dots, a_p, \dots$$

une suite infinie de nombres positifs croissants, tels que l'on ait $\lim_{p=\infty} a_p = +\infty$; ce sera, si l'on veut, la suite des nombres naturels. On prendra pour v_1 le premier terme de la suite (u) qui soit égal ou supérieur à a_1; en d'autres termes, si n_1 est, dans la suite (u) le rang du premier terme égal ou supérieur à a_1, on prendra $v_1 = u_{n_1}$; on prendra de même $v_2 = u_{n_2}$, en désignant par n_2 le rang, dans la suite (u), du premier terme plus grand que a_2, puis $v_3 = u_{n_3}$, en désignant par n_3 le rang, dans la suite (u), du premier terme plus grand que a_3, etc...

Il est clair que, dans la suite (u), u_{n_2} doit suivre u_{n_1}, que u_{n_3} doit suivre u_{n_2}, etc..., en sorte que l'on a $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ Comme

les termes de la suite (u) finissent par dépasser tel nombre positif que l'on veut, la proposition est évidente.

Par exemple, de la suite

$$1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{3},\ 3,\ \frac{1}{4},\ 4,\ldots,$$

on peut extraire la suite 1, 2, 3, ..., dans laquelle le n^e terme augmente indéfiniment avec n.

Un raisonnement analogue montre que si un ensemble infini (E) n'est pas borné en haut, on peut en extraire une suite v_1, v_2, ..., v_n, ... telle que l'on ait $\lim\limits_{n=\infty} v_n = +\infty$; on prendra alors pour v_1 un nombre de (E) supérieur à a_1, pour v_2 un nombre de (E) supérieur à a_2, etc... On ne sera jamais arrêté : dans ce cas, toutefois, la suite v_1, v_2, ..., v_n, ... n'est pas *définie* comme elle l'est dans la démonstration précédente, elle ne pourrait l'être que si l'ensemble (E) était lui-même défini.

62. — Si l'on n'a pas $\lim\limits_{n=\infty} |u_n| = +\infty$, on peut affirmer que la suite infinie (u), qu'elle soit bornée ou non, admet un point d'accumulation. En effet, affirmer qu'on n'a pas $\lim\limits_{n=\infty} |u_n| = +\infty$, c'est affirmer l'existence d'un nombre positif A tel que chaque terme de la suite (u) soit suivi de termes inférieurs ou égaux à A en valeur absolue [1], tel par conséquent qu'il y ait une infinité de termes de la suite inférieurs ou égaux à A en valeur absolue, c'est donc affirmer l'existence d'une infinité de termes de la suite dans l'intervalle $(-A, +A)$, ou encore l'existence, dans cet intervalle, d'un point d'accumulation de la suite, soit que l'intervalle contienne une infinité de termes inégaux (n° 49), soit qu'il contienne une infinité de termes égaux (n° 55).

[1] En effet, s'il n'existait pas un pareil nombre A, c'est que quelque soit le nombre positif A, il y aurait un terme de la suite (u) tel que tous les termes suivants fussent, en valeur absolue, plus grands que A, c'est donc qu'on aurait $\lim\limits_{n=\infty} |u_n| = +\infty$.

Par exemple la suite

$$1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ 3,\ \frac{1}{3},\ 4,\ \frac{1}{4},\ \ldots,$$

qui n'est pas bornée en haut, admet zéro pour point d'accumulation.

Soit encore $u_n = a^n$, en désignant par a un nombre fixe quelconque.

Supposons d'abord $a > 1$; on peut poser $a = 1 + \alpha$, α étant positif ; on a alors

$$a^n = (1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha\,;$$

il en résulte que l'on a $\lim\limits_{n=\infty} a^n = +\infty$, puisque si A est un nombre positif quelconque, il suffira de prendre n supérieur à la partie entière de $\frac{A - 1}{\alpha}$ pour que a^n soit plus grand que A.

Si a est plus petit que -1, on aura, d'après ce qu'on vient de dire, $\lim\limits_{n=\infty} |a^n| = +\infty$, mais a^n étant positif pour n pair, négatif pour n impair, on n'a ni $\lim\limits_{n=\infty} a^n = +\infty$, ni $\lim\limits_{n=\infty} a^n = -\infty$: on pourra écrire, si l'on veut, $\lim\limits_{n=\infty} a^{2n} = +\infty$, $\lim\limits_{n=\infty} a^{2n-1} = -\infty$.

Si a est compris entre -1 et $+1$, en posant $a = \frac{1}{b}$ et en remarquant alors que b est plus grand que 1 en valeur absolue, on voit que l'on a $\lim\limits_{n=\infty} a^n = 0$. Dans ce cas, si a est positif, les termes de la suite (u) tendent vers 0 en décroissant ; si a est négatif, ils sont alternativement positifs et négatifs, ils oscillent autour de 0 en s'en rapprochant de plus en plus, à mesure que n grandit.

Si $a = 1$, tous les termes de la suite sont égaux à 1 ; la suite a 1 pour limite ; si $a = -1$, les termes de la suite sont alternativement -1 et $+1$; elle a deux points d'accumulation -1 et $+1$.

63. — Observons en général que si la suite (u) admet un point d'accumulation a, soit qu'elle n'admette que celui-là, soit qu'elle en admette d'autres, on peut en extraire une suite infinie de termes $v_1, v_2, \ldots, v_p, \ldots$ dont les rangs $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$, qu'ils occu-

pent dans la suite (u) vont en croissant et tels que l'on ait $\lim_{p=\infty} v_p = a$.

Soit en effet

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_p, \quad \ldots,$$

une suite de nombres positifs décroissants, tels que l'on ait $\lim_{p=\infty} \varepsilon_p = 0$; ce sera, si l'on veut, la suite des inverses des nombres naturels. On prendra pour v_1 le premier terme de la suite (u) dont la différence avec a soit inférieure ou égale à ε_1 en valeur absolue ; si n_1 est le rang de ce terme dans la suite (u), on aura $v_1 = u_{n_1}$; on prendra pour v_2 le premier terme de (u), venant après u_{n_1}, et dont la différence avec a soit moindre en valeur absolue que ε_2, ...; si n_2 est le rang de ce terme dans la suite (u), on prendra $v_2 = u_{n_2}$, etc... ; le reste est évident. Inversement, il est clair que, si l'on peut extraire de la suite (u) une autre suite ayant a pour limite, a est un point d'accumulation de la suite (u).

On démontrera d'une façon analogue que si un ensemble (E) admet un point d'accumulation a, on peut en extraire une suite infinie $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ telle que l'on ait $\lim_{n=\infty} v_n = a$.

Si la suite (u) a plusieurs points d'accumulation, on pourra en extraire ainsi diverses suites, dont chacune aura pour limite le point d'accumulation qu'on voudra. La suite (u) apparaît ainsi, en quelque sorte, comme le mélange de plusieurs suites ayant des limites différentes.

64. — Dans le cas où la suite (u) est bornée en haut, l'ensemble (U') de ses points d'accumulation est lui-même borné en haut, car un point d'accumulation de la suite (u) ne peut évidemment dépasser la borne supérieure de cette suite. Cette borne supérieure joue dans diverses recherches un rôle assez important : observons d'abord qu'elle appartient certainement à (U') ; si en effet la borne supérieure B' de (U') n'appartenait pas à (U'), c'est qu'elle serait pour cet ensemble un point d'accumulation.

Or, il est bien aisé de voir que tout point d'accumulation a de (U') est un point d'accumulation de la suite (u) et, par conséquent, un élément de (U'). Soit en effet ε un nombre positif quelconque :

il y a dans (U′) un élément b tel que l'on ait $|a - b| < \frac{\varepsilon}{2}$; b étant un élément de (U′) autre que a, c'est-à-dire un point d'accumulation de (u) autre que a, il y a une infinité de termes u_n de la suite (u) tels que l'on ait $|b - u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, d'où l'on déduit $|a - u_n| < \varepsilon$; a est donc bien un point d'accumulation de (u), donc un élément de (U′), comme on l'avait annoncé.

Ceci posé, soit α la borne supérieure de la suite (u) et A la borne supérieure de l'ensemble (U′) de ses points d'accumulation. Puisque A est un point d'accumulation de la suite (u), on peut, de cette suite, extraire une autre suite (v) ayant A pour limite ; mais on ne peut certainement pas en extraire une autre suite ayant pour limite un nombre A′ plus grand que A, car ce nombre A′ serait alors un point d'accumulation de (u), donc un élément de (U′) et il n'y a pas dans (U′) de nombre plus grand que A. Cette remarque justifie le nom de plus grande des limites de la suite (u) que l'on donne quelquefois au nombre A.

Celui-ci peut encore être défini de la façon suivante :

Soit ε un nombre positif quelconque, il n'y a qu'un nombre limité de termes de la suite (u) qui dépassent $A + \varepsilon$; car autrement il y aurait un point d'accumulation de cette suite dans l'intervalle ($A + \varepsilon$, α), c'est-à-dire un point de (U′) au-delà de A. Au contraire, il y a une infinité de termes de la suite qui dépassent $A - \varepsilon$, puisque A étant un point d'accumulation de la suite (u), il y a certainement une infinité de termes de cette suite dans l'intervalle ($A - \varepsilon$, $A + \varepsilon$). Ainsi les nombres plus petits que A sont caractérisés par ce fait qu'il y a une infinité de termes de (u) qui les dépassent, et les nombres plus grands que A par le fait qu'il n'y a qu'un nombre fini de termes de (u) qui puissent les dépasser. Si la suite (u) est bornée en bas, il y aura lieu de même, de considérer *la plus petite de ses limites*, qui est la borne inférieure de l'ensemble (U′) de ses points d'accumulation. Si la suite a une limite au sens propre du mot, l'ensemble (U′) se réduit à cette limite avec laquelle se confondent la borne supérieure et la borne inférieure de (U′).

III. — ENSEMBLES DÉNOMBRABLES

65. — La façon même dont on a rattaché la notion de limite à celle d'ensemble pose la question suivante :

Les termes d'un ensemble (E) peuvent-ils être rangés dans un ordre tel que

$$(u) \qquad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots ?$$

Il importe d'abord de bien préciser ce qu'il faut entendre par là.

En disant que les termes de l'ensemble (E), qui, par hypothèse sont tous distincts, peuvent être rangés dans l'ordre u_1, u_2, ..., on entend que, quel que soit l'élément de l'ensemble que l'on considère, il y a dans la suite (u) un terme (et un seul) qui lui est égal et que, inversement, tout terme de la suite (u) appartient à l'ensemble (E).

Plaçons-nous à un autre point de vue, qui va nous permettre d'introduire une notion importante.

66. — Considérons deux ensembles (E), (E') : imaginons qu'on puisse faire correspondre à chaque élément a de (E) un élément a' de (E') [1] et un seul, qu'à deux éléments distincts a, b de (E) correspondent toujours deux éléments distincts a', b' de (E'), enfin que chaque élément de (E') soit le correspondant d'un élément de (E) : deux éléments distincts de (E') seront nécessairement les correspondants de deux éléments distincts de (E), puisqu'à un élément de (E) ne correspond qu'*un* élément de (E') : au lieu de dire que l'élément a' de (E') correspond à l'élément (a) de E, et que a est l'élément de (E) auquel correspond l'élément a' de (E'), je dirai plus simplement que les éléments a, a' pris, le premier dans (E), se second dans (E'), se correspondent.

[1] Il faut entendre par là que le fait de penser l'élément a de l'ensemble E, éveille la pensée de l'élément déterminé a' de l'ensemble E'.

Je qualifierai une telle correspondance, établie entre les éléments des deux ensembles, en disant qu'elle est parfaite, ou que les ensembles se correspondent parfaitement : au lieu de dire qu'il est possible d'établir entre deux ensembles une correspondance parfaite, on dit aussi que ces deux ensembles ont même *puissance*.

On ne peut évidemment établir une correspondance parfaite entre deux ensembles dont l'un est fini que si l'autre est aussi fini et comporte le même nombre d'éléments : c'est la possibilité d'une pareille correspondance qui permet d'affirmer que deux « collections d'objets » ont le même nombre (naturel).

On n'a jusqu'ici considéré que des ensembles ou des suites de nombres représentés par des points sur un axe [1]. Mais il est clair qu'on peut bien réunir par la pensée des objets autres que des nombres ou leur assigner un ordre. Dans ce chapitre même, il sera, par exemple, question d'ensembles dont les éléments sont des systèmes de nombres (n° 75). On peut raisonner sur des ensembles dont les éléments sont des objets quelconques, et, comme au n° 43, dire d'un tel ensemble qu'il est déterminé si l'on peut affirmer d'un objet quelconque qu'il appartient ou qu'il n'appartient pas à l'ensemble, que l'ensemble est défini si l'on définit le moyen de reconnaître d'un objet quelconque qu'il appartient ou n'appartient pas à l'ensemble : On suppose essentiellement que ces objets soient distincts. De même on peut concevoir une infinité d'objets rangés dans un ordre déterminé u_1, u_2, ..., u_n, ..., les lettres u_1, u_2, ..., désignant non plus des nombres, mais des objets.

Les notions de *borne*, de *limite*, de *point d'accumulation*, ne s'appliquent plus à ces suites ou ensembles infinis, conçus avec cette généralité. Ces notions impliquent en effet les notions de plus grand, de plus petit, de différence, qui peuvent n'avoir aucune signification pour les objets compris dans l'ensemble ou rangés dans la suite. Plus tard, on étendra quelques-unes de ces notions à certains ensembles dont les éléments sont des systèmes de deux (ou de plusieurs) nombres. La plupart de ces extensions pourraient d'ailleurs, sans difficulté, être présentées de suite. Mais la notion d'ensembles ayant même puissance, la possibilité

[1] Sauf au n° 58 où il a été question incidemment d'une suite infinie d'intervalles.

ou l'impossibilité de ranger dans une suite telle que u_1, u_2, ..., u_n, ... les éléments d'un ensemble ne supposent en aucune façon que ces éléments soient des *nombres* : aussi en introduisant ces diverses notions, ai-je eu soin d'employer le mot « élément » et non le mot « nombre ».

Voici quelques exemples de correspondance parfaite entre des ensembles infinis, choisis d'ailleurs dans le cas qui nous intéresse le plus immédiatement, celui où les éléments sont des nombres (ou des points).

67. — Considérons d'une part l'ensemble (E) des nombres naturels et l'ensemble (E') des nombres positifs pairs. A chaque élément de (E), à chaque nombre naturel, on peut faire correspondre son double, qui figure dans (E') ; chaque élément de (E') est le correspondant de sa moitié, qui figure dans (E) ; on voit de suite que la correspondance ainsi établie entre les deux ensembles est parfaite : l'ensemble des nombres naturels a la même puissance que l'ensemble des nombres pairs positifs.

On peut établir de même une correspondance parfaite entre les nombres qui appartiennent à l'intervalle (0, 1) et les nombres qui appartiennent à l'intervalle (a, b), en supposant a différent de b : il suffira de faire correspondre au nombre x du premier ensemble le nombre $x' = a + (b - a)x$ du second. Par exemple, on peut établir une correspondance parfaite entre l'ensemble des nombres qui appartiennent à l'intervalle (0, 1) et l'ensemble des nombres qui appartiennent à l'intervalle (0, 2) ; il suffit de regarder comme se correspondant un nombre du premier ensemble, et le double de ce nombre, dans le second ensemble.

Si l'on peut établir une correspondance parfaite entre les ensembles (E) et (E'') d'une part, entre les ensembles (E') et (E'') d'autre part, on peut établir une correspondance parfaite entre les ensembles (E), (E') qui, ainsi, ont une même puissance : il suffira de faire se correspondre dans (E) et dans (E') deux éléments qui correspondent à un même élément de (E''). Par exemple, l'ensemble des nombres qui appartiennent à l'intervalle (a, b) et l'ensemble des nombres qui appartiennent à l'intervalle (a', b') ont même puissance que l'ensemble des nombres qui appartiennent à l'intervalle (0, 1) ; les deux premiers ensembles ont même puissance.

On dit qu'un ensemble (E_1) est *contenu* dans l'ensemble (E), ou que l'ensemble (E) contient l'ensemble (E_1), si tout élément de (E_1) est un élément de (E) : cette façon de parler qui, pour les ensembles de nombres a déjà été introduite au n° **46**, n'exclut pas l'identité entre les ensembles (E), (E_1) ; l'identité a lieu lorsque chacun des ensembles est *contenu* dans l'autre.

On dit que l'ensemble (E_1) est une *partie* de l'ensemble (E) lorsque l'ensemble (E_1) est contenu dans l'ensemble (E) et que certains éléments de (E) n'appartiennent pas à (E_1) ; ainsi l'ensemble des nombres impairs ou des nombres pairs, ou des nombres premiers, est une partie de l'ensemble des nombres entiers. L'ensemble des nombres qui appartiennent à l'intervalle (0, 1) est une partie des nombres qui appartiennent à l'intervalle (0, 2). Les notions de contenu ou de contenant, et de partie, ne supposent pas que les éléments des ensembles considérés soient des nombres.

L'ensemble des nombres positifs pairs est une partie de l'ensemble des nombres naturels ; on a montré plus haut que les deux ensembles ont même puissance : on voit donc qu'un ensemble infini peut avoir la même puissance qu'une de ses parties.

De même l'ensemble des nombres qui appartiennent à l'intertervalle (0, 2) a la même puissance que l'ensemble des nombres qui appartiennent à l'intervalle (0, 1), lequel est une partie du premier intervalle. Ceci ne peut avoir lieu que pour un ensemble infini et le fait de ne pouvoir avoir même puissance qu'une de ses parties est ce qui caractérise les ensembles finis, les *collections*, au sens de l'arithmétique élémentaire.

68. — On dit qu'un ensemble (E) est dénombrable lorsqu'il a la même puissance que l'ensemble des nombres naturels : dire que l'ensemble (E) est dénombrable, c'est dire qu'on peut établir une correspondance parfaite entre les éléments de (E) et les nombres naturels : cette correspondance étant établie, représentons chaque élément de (E) par une même lettre affectée d'un indice égal au nombre naturel qui correspond à cet élément, et rappelons-nous qu'à chaque nombre naturel correspond un élément de (E) : les éléments de (E) pourront être représentés par la suite infinie

$$u_1, \quad u_2, \ldots, \quad u_n, \ldots$$

Chaque élément de (E) occupera un certain rang dans cette suite et le n^e terme de cette suite sera l'élément de (E) qui correspond au nombre naturel n. Inversement il est clair que si les éléments de (E) peuvent être rangés dans une telle suite infinie, l'ensemble (E) est dénombrable.

69. — Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'on puisse assigner aux éléments de (E), supposés en nombre infini, un *ordre de succession* qui satisfasse aux conditions suivantes, évidemment réalisées pour un ensemble dont les éléments correspondent à la suite des nombres naturels.

1° La loi d'après laquelle on décide qu'un élément a de l'ensemble précède (ou suit) un autre élément b n'implique pas contradiction : c'est-à-dire que si a précède b, b suit a; que si a précède b, et si b précède c, a précède nécessairement c.

2° Enfin, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments qui précèdent un élément quelconque a de (E) ; en particulier il y a un élément de (E) qui n'est précédé d'aucun autre, qui est le *premier*. Le nombre d'éléments qui précèdent a, augmenté d'une unité, est le nombre naturel auquel correspond a. Si ces diverses conditions, qui n'impliquent en aucune façon la supposition que les éléments de (E) soient des nombres, sont vérifiées, l'ensemble est dénombrable : l'ensemble étant infini, la seconde condition implique qu'il n'y a pas dans (E) de *dernier* élément, d'élément qui ne soit suivi d'aucun autre.

D'après cela il est clair que si (E) est dénombrable, tout ensemble (E_1) contenu dans (E) est fini ou dénombrable. Si, en effet, l'ensemble (E_1) est infini, on pourra regarder un élément a de (E_1) comme suivant ou précédant un autre élément b selon que a considéré comme appartenant à (E) suit ou précède b considéré aussi comme appartenant à (E) ; il est clair que les conditions 1° et 2° qui, par hypothèse, sont vérifiées pour l'ordre adopté dans (E), le seront encore dans (E_1).

70. — Si (E) est un ensemble dénombrable, et si l'on y introduit un nombre fini p d'éléments qui n'y figuraient pas, le nouvel ensemble (E′) ainsi formé sera dénombrable.

Il suffira de faire correspondre les p nouveaux éléments aux

nombres $1, 2, \ldots, p$ et de faire correspondre au nombre $n + p$, l'élément de (E) qui, en tant qu'il faisait partie de l'ensemble (E), correspondait au nombre n.

Si (E), (E′) sont deux ensembles dénombrables, l'ensemble (E″) des éléments distincts qui appartiennent soit à (E), soit à (E′) est aussi dénombrable : je représenterai cet ensemble par le symbole (1)

$$(E) + (E').$$

Supposons d'abord que les ensembles (E), (E′) n'aient pas d'élément commun : on pourra faire correspondre au nombre $2n$ l'élément de l'ensemble (E) + (E′) qui, en tant qu'il appartenait à (E), correspondait au nombre n, et au nombre $2p - 1$ l'élément de l'ensemble (E) + (E′) qui, en tant qu'il appartenait à (E′), correspondait au nombre p.

Si (E) et (E′) ont des éléments communs, l'ensemble des éléments de (E′) qui ne figurent pas dans (E) est une partie (E'_1) de (E′) : l'ensemble (E'_1) est fini ou dénombrable ; dans les deux cas l'ensemble $(E) + (E'_1)$ qui ne diffère pas de l'ensemble dénombrable (E) + (E′), est lui-même dénombrable..

Cette proposition s'étend évidemment à trois, quatre,... ensembles dénombrables : en général si (E), (E′),... $(E^{(p-1)})$ sont des ensembles dénombrables, il en est de même de l'ensemble

$$(E) + (E') + \ldots + (E^{(p-1)}).$$

Par exemple, l'ensemble des nombres entiers positifs, nuls ou négatifs est dénombrable ; au surplus, on peut ranger cet ensemble dans la suite

$$0, \quad -1, \quad +1, \quad -2, \quad +2, \quad -3, \quad +3, \ldots.$$

et faire correspondre chaque terme à son rang, c'est-à-dire le nombre entier p, s'il est nul ou positif, au nombre naturel $2p + 1$, et, s'il est négatif, au nombre naturel $-2p$. Inversement chaque nombre

(1) Cette notation s'étend naturellement à un nombre quelconque d'ensembles (E), (E′), (E″),... : le symbole (E) + (E′) + (E″) + ... représente l'ensemble des éléments qui entrent soit dans (E), soit dans (E′), soit dans (E″),..., chacun de ces éléments n'étant pris qu'une fois, conformément à la convention faite de ne considérer que des ensembles dont tous les éléments soient distincts.

naturel correspond à sa moitié changée de signe s'il est pair et, s'il est impair, à la moitié du nombre entier qui le précède immédiatement.

71. — Cette remarque va nous permettre de mettre sous une autre forme les conditions nécessaires et suffisantes données au n° 69 pour qu'un ensemble infini soit dénombrable. Pour qu'un ensemble (E) soit dénombrable, il faut d'abord qu'on puisse imposer à ses éléments un ordre de succession, c'est-à-dire que deux éléments a et b de l'ensemble étant donnés, on puisse dire lequel précède (ou suit l'autre) : bien entendu, la loi de succession ne doit pas être contradictoire ; c'est la condition 1° du n° 69. Il faut en outre, que quels que soient les éléments a, b de l'ensemble, le nombre des éléments de l'ensemble, qui, d'après l'ordre de succession imposé, sont entre a et b, soit fini. (Un élément qui est entre a et b est, si l'élément a précède l'élément b, un élément qui suit a et qui précède b ; les notions du plus grand ou du plus petit n'ont rien à faire ici).

Sous ces conditions, l'ensemble est fini ou dénombrable. En effet on pourra faire correspondre un élément a quelconque au nombre o, puis ; si b est un autre élément quelconque de l'ensemble, on le fera correspondre à un entier positif ou négatif suivant que b suivra ou précèdera a, entier dont la valeur absolue sera le nombre d'éléments de l'ensemble qui sont entre a et b, augmenté d'une unité.

On aura fait ainsi se correspondre d'une façon parfaite l'ensemble considéré d'une part, et l'ensemble des nombres entiers ou une partie de cet ensemble. Ecartons le cas où l'ensemble (E) serait fini. Alors, ou bien l'élément a auquel on fait correspondre le nombre o sera précédé d'un nombre fini d'éléments et suivi d'une infinité, ou bien précédé d'une infinité et suivi d'un nombre fini d'éléments, ou bien précédé et suivi d'une infinité d'éléments, en sorte que, si l'on désigne chaque élément de l'ensemble par la lettre u affectée d'un indice positif, nul, ou négatif, les éléments de l'ensemble pourront être rangés dans une suite appartenant à l'un des trois types suivants

$$\text{(I)} \qquad u_{-p}, \quad u_{-p+1}, \quad \ldots, \quad u_{-1}, \quad u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots ;$$

$$\text{(II)} \qquad \ldots, \quad u_{-2}, \quad u_{-1}, \quad u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_p ;$$

$$\text{(III)} \qquad \ldots, \quad u_{-2}, \quad u_{-1}, \quad u_0, \quad u_1, \quad u_2, \quad \ldots ;$$

la suite (I) a un premier terme (u_{-p}), et n'a pas de dernier terme ; la suite (II) n'a pas de premier terme et a un dernier terme (u_p) ; la suite (III) n'a ni premier, ni dernier terme. Dans tous les cas l'ensemble (E) est dénombrable, puisqu'il correspond parfaitement soit à l'ensemble des nombres entiers, soit à une partie de cet ensemble.

72. — Un ensemble infini de nombres (ou de points) qui n'a pas de point d'accumulation est dénombrable.

Il suffit, pour le voir, de regarder l'élément a comme précédant l'élément b s'il est plus petit ; il n'y a qu'un nombre fini d'éléments entre a et b, puis qu'il n'y a pas de point d'accumulation entre a et b.

Un ensemble infini de nombres ou de points qui n'a pas d'autres points d'accumulation que ses bornes est dénombrable.

On peut supposer que l'ensemble (E) ait une borne inférieure, ou une borne supérieure, ou encore qu'il soit borné en haut et en bas. Si l'une ou l'autre borne font partie de (E), commençons par les en ôter et soit (E_1) l'ensemble ainsi modifié, dont les bornes ne font plus partie. On regardera encore l'élément a comme précédant l'élément b s'il est plus petit ; il n'y a qu'un nombre fini d'éléments entre a et b, donc (E_1) est dénombrable ; il en sera de même de l'ensemble (E) obtenu en introduisant dans (E_1) un ou deux nombres (les bornes) qui n'y figuraient pas.

Un ensemble infini de nombres ou de points qui n'a qu'un nombre fini de points d'accumulation est dénombrable.

Soient α_2, $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ les points d'accumulation de l'ensemble considéré (E) : supposons $\alpha_1 < \alpha_2, \ldots, < \alpha_p$ et soit (E_1) l'ensemble des nombres de (E) qui sont plus petits que α_1, (E_2) l'ensemble des nombres de (E) qui appartiennent à l'intervalle (α_1, α_2), ..., (E_p) l'ensemble des nombres de (E) qui appartiennent à l'intervalle (α_{p-1}, α_p), (E_{p+1}) l'ensemble des nombres de (E) qui sont plus grands que α_p ; chacun des ensembles (E_1), (E_2), ..., (E_{p+1}), d'après ce qui précède, est fini ou dénombrable ; l'ensemble (E) formé des éléments distincts qui appartiennent à l'un ou à l'autre est dénombrable.

73. — Il y a, d'après cela, une véritable identité entre une

suite infinie de nombres tous distincts

$$(u) \qquad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

qui admet une limite, et un ensemble borné (U) n'ayant qu'un point d'accumulation. Les termes de la suite (u) forment un tel ensemble, qui a pour point d'accumulation la limite de la suite. Inversement les éléments d'un ensemble borné n'ayant qu'un point d'accumulation peuvent être rangés dans une suite telle que (u), laquelle aura nécessairement le point d'accumulation pour limite. On voit ainsi clairement que la limite d'une telle suite ne dépend pas de l'ordre de ses termes, mais seulement de leurs valeurs. On voit aussi qu'on peut sans altérer la limite de la suite (u), à supposer qu'elle en ait une, supprimer un nombre fini ou infini de termes, pourvu qu'il en reste une infinité. Leur ensemble, toujours dénombrable, aura en effet un point d'accumulation, qui ne pourra être distinct du point d'accumulation de l'ensemble (U) des termes de la suite (u), dans lequel il est contenu (n° **51**).

Cette identité entre la suite et l'ensemble de ses termes n'est plus aussi complète quand tous les termes de la suite ne sont pas distincts. Puisqu'on s'est interdit (n° **43**), de parler d'ensembles dont tous les éléments ne sont pas distincts [1] c'est de l'ensemble (U) des termes *distincts* de la suite

$$(u) \qquad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

qu'il peut alors être question et le lecteur n'a pas manqué de remarquer que c'est toujours sur des ensembles ainsi constitués qu'ont porté les raisonnements antérieurs ; c'est pour pouvoir donner un énoncé unique qu'on a introduit l'expression « point d'accumulation de la suite » dans un sens qui peut être différent de l'expression « point d'accumulation de l'ensemble ». Le fait que l'on peut, d'une suite infinie qui a une limite A, supprimer une infinité de termes sans altérer la limite pourvu qu'il en reste une infinité est général, ainsi qu'il résulte immédiatement de la définition même du mot limite ; mais la proposition, qui concerne la possibilité de changer l'ordre des termes d'une suite sans en changer

[1] On verra au n° **102** comment on peut, dans une certaine mesure, s'affranchir de cette restriction.

la limite, présente quelque obscurité quand cette suite comporte une infinité d'éléments égaux et, comme c'est un point qui reviendra plus tard, il est bon de l'éclaircir immédiatement.

74. — Que faut-il entendre quand on dit que les deux suites

$$(u) \qquad u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots,$$
$$(v) \qquad v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_n, \quad \ldots$$

sont identiques sauf l'ordre des termes, ou encore que la seconde suite n'est autre que la première, dans laquelle on a changé l'ordre des termes?

La réponse est immédiate si la suite (u) n'a que des termes distincts; on entend qu'il en est de même dans la suite (v), et que tout terme qui figure dans une suite figure aussi dans l'autre. Elle serait aussi facile si la suite (u), tout en comportant des termes égaux, n'en comportait jamais qu'un nombre fini. Chaque terme devrait figurer le même nombre de fois dans les deux suites.

D'une façon générale, soit

$$(\varphi) \qquad \varphi(1), \quad \varphi(2), \quad \ldots, \quad \varphi(n), \quad \ldots,$$

une suite identique, sauf l'ordre des termes, à la suite des nombres naturels, c'est-à-dire, comme on vient de l'expliquer, que ses termes, tous différents, sont des nombres naturels et que chaque nombre naturel y trouve sa place, soit $\psi(p)$ le rang qu'occupe dans cette suite le nombre naturel p, en sorte que l'une quelconque des égalités

$$n = \psi(p), \quad p = \varphi(n),$$

où n et p sont des nombres naturels, entraîne l'autre.

Ceci posé, on dira que les deux suites

$$u_1, \qquad u_2, \qquad \ldots, \qquad u_n, \qquad \ldots,$$
$$u_{\varphi(1)}, \qquad u_{\varphi(2)}, \qquad \ldots, \qquad u_{\varphi(n)}, \qquad \ldots,$$

où il est bien entendu que $u_{\varphi(n)}$ a le même sens que u_p si $\varphi(n)$ est égal à p, sont identiques, sauf l'ordre des termes, ou encore que la seconde n'est autre chose que la première dans laquelle on a changé cet ordre; le terme qui, dans la première, occupe le rang $p = \varphi(n)$

occupe le rang $n = \psi(p)$ dans la seconde; dire que la suite (v) est identique à la suite (u), sauf l'ordre des termes, c'est dire qu'il existe une suite (φ) telle que l'on ait $v_n = u_{\varphi(n)}$, pour toutes les valeurs du nombre naturel n.

Il convient de remarquer, sur la suite (φ), que l'on a nécessairement

$$\lim_{n=\infty} \varphi(n) = +\infty;$$

soit en effet p un nombre naturel quelconque, ce nombre occupe le rang $\psi(p)$ dans la suite (φ); soit q le plus grand des nombres $\psi(1)$, $\psi(2)$, ..., $\psi(p)$, ou, si l'on veut, le rang le plus élevé que puissent avoir dans la suite (φ) les nombres $1, 2, \ldots, p$; les termes de la suite (φ) qui ont un rang supérieur à q seront sûrement plus grands que p; ainsi à chaque nombre naturel p on peut faire correspondre un nombre naturel q tel que l'inégalité $m > q$ entraîne $\varphi(m) > p$; il en résulte qu'on a bien $\lim\limits_{n=\infty} \varphi(n) = +\infty$. Cette remarque suffirait à prouver, indépendamment de ce qui a été dit dans le numéro précédent que, si la suite (u) a une limite A, il en est de même de la suite dont le n^e terme est $u_{\varphi(n)}$. Grossièrement, on peut dire que les termes qui sont très loin dans une suite, sont aussi très loin dans l'autre. Si les premiers diffèrent très peu d'un nombre A (leur limite), il en est de même des seconds.

75. — L'ensemble (E) dont les éléments sont les différents systèmes $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$ que l'on peut former en prenant pour α, β, ..., λ des nombres entiers positifs, nuls ou négatifs est dénombrable.

Il convient d'expliquer d'abord le sens de ce théorème.

1° Si l'on considère p nombres entiers, (positifs, nuls, ou négatifs) et qu'on les range dans un ordre déterminé, on obtient un élément de (E).

2° Tout élément de (E) est un pareil système de p nombres entiers.

3° Deux systèmes $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$, $(\alpha', \beta', \ldots, \lambda')$ de p nombres entiers sont regardés comme identiques si l'on a $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, ..., $\lambda = \lambda'$ et seulement dans ce cas. On suppose qu'il n'y ait pas dans (E) deux éléments identiques.

Je vais prouver que l'on peut assigner aux éléments $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$ de (E) un ordre qui satisfasse aux conditions du n° **69**. On conviendra par exemple de ranger l'élément $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$ avant l'élément $(\alpha', \beta', \ldots, \lambda')$ si la somme des valeurs absolues des entiers $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ est inférieure à la somme des valeurs absolues des entiers $\alpha', \beta', \ldots, \lambda'$ et lorsque les deux sommes sont égales, si l'on a $\alpha < \alpha'$, ou dans le cas où $\alpha = \alpha'$, si l'on a $\beta < \beta'$, ou dans le cas où l'on a à la fois $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, si l'on a $\gamma < \gamma'$ etc... Avant un élément $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$ il n'y a qu'un nombre fini d'éléments, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de systèmes de p nombres entiers, positifs nuls ou négatifs, tels que la somme de leurs valeurs absolues soit inférieure ou égale à $|\alpha| + |\beta| + \ldots + |\lambda|$. Dans cet ordre, fixé d'ailleurs très arbitrairement, le premier élément est le système (0,0, ..., 0), le second (0,0, ..., — 1), le troisième (0,0, ..., 1), etc....

Toute partie de l'ensemble (E) est finie ou dénombrable : par conséquent, tout ensemble infini dont les éléments seraient *certains* des systèmes de p nombres entiers $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$ est certainement dénombrable; par exemple on constituerait un système dénombrable avec les éléments $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$ où tous les entiers $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ seraient positifs.

Cette proposition, dont on va tirer des conséquences assez singulières, va permettre d'abord d'expliquer la signification de quelques expressions usuelles.

76. — Supposons que le symbole à p indices

$$v_{\alpha, \beta, \ldots, \lambda}$$

ait une signification numérique déterminée, soit pour chaque système de p nombres entiers $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$, c'est-à-dire pour chaque élément de l'ensemble (E), soit pour certains seulement des systèmes de p nombres entiers $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$, c'est-à-dire pour chaque élément d'une partie déterminée (E') de l'ensemble (E), par exemple, pour les systèmes de p nombres entiers positifs. On entend par là qu'à chaque système $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda)$ non exclu correspond un nombre déterminé que l'on désigne par $v_{\alpha, \beta, \ldots, \lambda}$: le système de ces symboles, ou de leurs valeurs, constitue ce que l'on appelle un tableau à entrée p^{uple}.

Cette façon de parler s'explique très bien dans les cas où $p = 2$, $p = 3$.

Plaçons-nous dans le cas où $p = 2$: le système des symboles $v_{\alpha,\beta}$ constitue une table à *double entrée*. Supposons, par exemple que l'on se borne à considérer l'ensemble (E') des systèmes (α, β) de deux nombres naturels. On peut imaginer une table analogue à la table de multiplication, mais avec une extension indéfinie à droite et en haut. Chaque case de cette table appartient à une rangée horizontale et à une rangée verticale; les rangées horizontales peuvent être numérotées en allant de bas en haut; les rangées verticales en allant de gauche à droite : chaque case sera ainsi numérotée au moyen de deux nombres indiquant, le premier, à quelle rangée horizontale, le second, à quelle rangée verticale appartient cette case. Au lieu de placer dans chaque case, comme dans la figure

4,1	4,2	4,3	4,4
3,1	3,2	3,3	3,4
2,1	2,2	2,3	2,4
1,1	1,2	1,3	1,4

10	14	19	25
6	9	13	18
3	5	8	12
1	2	4	7

de gauche, les deux indices α, β qui la spécifient, on aurait pu placer le nombre $v_{\alpha,\beta}$; tous ces nombres auraient ainsi été rangés dans un *tableau à double entrée*. Dans la figure de droite les cases ont été numérotées, en quelque sorte, parallèlement aux diagonales, chacune d'elles se trouve ainsi désignée par un seul numéro : que le lecteur veuille bien se représenter les deux figures comme étant superposées ; il imaginera de suite la correspondance qui s'établit entre chaque couple de nombres naturels (α, β) et le nombre naturel n qui, dans le second mode de numérotage désigne la case qui, dans le premier système, est désignée par les deux nombres α, β. La correspondance parfaite que l'on peut ainsi établir entre les systèmes de deux nombres naturels (α, β) et l'en-

35	34	33	32	31	30	29
36	16	15	14	13	12	28
37	17	5	4	3	11	27
38	18	6	1	2	10	26
39	19	7	8	9	25	49
40	20	21	22	23	24	48
41	42	43	44	45	46	47

3, —3	3, —2	3, —1	3,0	3,1	3,2	3,3
2, —3	2, —2	2, —1	2,0	2,1	2,2	2,3
1, —3	1, —2	1, —1	1,0	1,1	1,2	1,3
0, —3	0, —2	0, —1	0,0	0,1	0,2	0,3
—1, —3	—1, —2	—1, —1	—1,0	—1,1	—1,2	—1,3
—2, —3	—2, —2	—2, —1	—2,0	—2,1	—2,2	—2,3
—3, —3	—3, —2	—3, —1	—3,0	—3,1	—3,2	—3,3

semble des nombres naturels est rendue visible [1]. Si maintenant on désigne par u_n le même nombre que $v_{\alpha,\beta}$, lorsque n correspond à (α, β), on voit comment un tableau à double entrée formé par les nombres $v_{\alpha,\beta}$ peut être transformé en une suite *linéaire* $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots,$ ou réciproquement.

On pourrait aussi bien réaliser d'une façon concrète la correspondance entre l'ensemble des systèmes de deux nombres entiers positifs, nuls ou négatifs et l'ensemble des nombres naturels. La figure de la page précédente, dont il me suffira de dire que, à gauche, les cases ont été numérotées en tournant, éclaircit un des modes de correspondance que l'on peut imaginer.

D'ailleurs rien n'empêche, tout en conservant les mêmes images, d'exclure certains des systèmes (α, β) ; les cases correspondantes devraient rester vides. Par exemple, dans le premier mode de représentation, qui se rapportait au cas où α, β étaient des nombres naturels, on peut supposer que le nombre α ne prenne que les valeurs $1, 2, \ldots, p$; le tableau se composera alors de p rangées horizontales et d'une infinité de rangées verticales limitées.

Quelque soit le mode de correspondance que l'on imagine, entre l'ensemble des systèmes (α, β) de nombres entiers et l'ensemble des nombres naturels n, il est aisé de voir que si l'un des nombres α, β augmente indéfiniment en valeur absolue, n augmente aussi indéfiniment ; réciproquement si n augmente indéfiniment, l'un au moins des nombres α, β augmente indéfiniment en valeur absolue. En d'autres termes, et d'une façon grossière, si on suppose les nombres $v_{\alpha,\beta}$ rangés d'une part dans un tableau à double entrée et d'autre part dans une suite linéaire $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots,$ les éléments qui seront à l'infini dans le tableau sont les mêmes que ceux qui sont à l'infini dans la suite. C'est une généralisation de la proposition établie au n° **74**, généralisation sur laquelle je crois inutile d'insister. Je me bornerai à remarquer encore que si la suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ a une limite A, les nombres $v_{\alpha,\beta}$ seront très voisins de A, lorsque l'un des nombres α, β sera très grand en

[1] Le lecteur pourra s'amuser à démontrer que le couple de nombres naturels (α, β) et le nombre naturel n se correspondent si l'on a

$$(\alpha + \beta)^2 - 3\beta - \alpha + 2 = 2n.$$

valeur absolue. Le lecteur n'aura aucune peine à énoncer cette proposition sous une forme précise.

Voici maintenant quelques conséquences du théorème fondamental du n° **75**.

77. — L'ensemble des systèmes (α, β), où α désigne un nombre entier positif, nul ou négatif et où β désigne un nombre naturel premier à α, étant une partie du système de deux nombres entiers quelconques, est dénombrable, comme ce dernier système. Si l'on remplace alors le symbole (α, β) par le symbole $\frac{\alpha}{\beta}$, on a le théorème suivant : l'ensemble (R) des nombres rationnels est dénombrable.

Cet ensemble (R) est d'une nature très différente de ceux des ensembles dénombrables (de points ou de nombres) que l'on a considérés aux n^os **55**, **72**, **73** : en effet tout nombre, ou tout point est un point d'accumulation de l'ensemble (R) puisqu'il y a des nombres rationnels qui approchent autant qu'on le veut de n'importe quel nombre, rationnel ou non.

Il en est de même de l'ensemble des nombres ou des points $ax + by$ que l'on a considéré au n° **30** ; je rappelle que a et b sont des nombres dont le rapport est irrationnel et que les éléments de l'ensemble considéré s'obtenaient en remplaçant x, y par tous les systèmes de nombres entiers positifs, nuls, ou négatifs. Les explications données au n° **31** montrent que tout point de l'axe peut être regardé comme un point d'accumulation de cet ensemble qui, lui aussi, est dénombrable, puisqu'il est manifestement en correspondance parfaite avec l'ensemble des systèmes de deux nombres entiers, positifs ou négatifs.

78. — Voici maintenant une extension du théorème du n° **70**. Considérons une suite infinie d'ensembles déterminés

$$(E_1), \quad (E_2), \quad \ldots, \quad (E_n), \quad \ldots,$$

tous finis ou dénombrables : l'ensemble (E) des éléments distincts qui appartiennent soit à l'un, soit à l'autre, des ensembles (E_1), (E_2), ... est fini ou dénombrable.

Supposons d'abord que deux ensembles pris dans la suite n'aient jamais d'élément commun.

Chaque ensemble (E_n) étant dénombrable (ou fini), on peut faire correspondre chacun de ses éléments à un nombre naturel ; convenons, afin de garder la trace de l'indice n, de faire correspondre au système des deux nombres naturels (n, p) celui des éléments de (E_n) qui correspond au nombre p. Dans le cas où l'ensemble (E_n) serait fini, le nombre p ne pourrait prendre qu'un nombre fini de valeurs. Dans tous les cas, il est clair que l'ensemble (E) correspond parfaitement à l'ensemble (dénombrable) des systèmes de deux nombres naturels (n, p), d'où l'on aurait exclu les éléments pour lesquels p dépasserait le nombre des éléments de (E_n), si ce dernier ensemble était fini. Or tout ensemble qui fait partie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

S'il y avait des éléments communs aux ensembles (E_n), on pourrait raisonner de la même façon, quitte à ne garder jamais que l'un des systèmes (n, p) qui correspondent à des éléments qui se trouvent dans plusieurs ensémbles.

Le théorème qu'on vient de démontrer peut s'énoncer sous la forme suivante : Considérons un ensemble fini ou dénombrable $(\mathcal{E})$ dont les éléments soient eux-mêmes des ensembles finis ou dénombrables (E) et l'ensemble $(\mathcal{E}')$ dont tous les éléments sont les éléments distincts qui appartiennent à quelqu'un des ensembles (E) l'ensemble $(\mathcal{E}')$ est dénombrable. En effet, dire que l'ensemble $(\mathcal{E})$ est dénombrable, c'est dire que les ensembles (E) peuvent être rangés dans une suite telle que celle qu'on vient de considérer ; on est ramené au cas précédent.

Il serait aisé de déduire de ce théorème les suivants :

Considérons l'ensemble (E_n) des nombres qui vérifient l'équation

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

où a_0 est un nombre naturel et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des entiers positifs, nuls ou négatifs : cet ensemble est dénombrable ; l'ensemble des nombres distincts qui appartiennent à quelqu'un des ensembles (E_1), $(E_2), \dots, (E_n)$ c'est-à-dire des nombres [1] qui vérifient une équation algé-

[1] Il n'est question ici que des nombres *réels*, puisque les nombres imaginaires ne sont pas encore définis : toutefois le théorème subsiste sans cette restriction.

brique entière à coefficients entiers, ou comme on dit encore, des *nombres algébriques*, est dénombrable.

79. — L'ensemble des nombres qui appartiennent à un intervalle (a, b) n'est pas dénombrable.

Il suffira (n° **67**) de raisonner sur l'ensemble des nombres qui appartiennent à l'intervalle (0, 1) ; et même sur l'ensemble (E) des nombres, autres que 1, qui appartiennent à cet intervalle. Si en effet l'ensemble (E) était dénombrable, il en serait de même de l'ensemble des nombres qui appartiennent à l'intervalle (0, 1).

Chacun des nombres de (E) est déterminé par sa *représentation décimale*,

$$0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots ;$$

la partie entière est 0, et la mantisse est formée au moyen des chiffres 0, 1, 2, ..., 9 avec cette seule condition que tous les chiffres qui suivent un chiffre donné ne soient pas des 9 (n° **18**).

Admettons que l'ensemble (E) soit dénombrable, c'est-à-dire qu'on puisse faire correspondre chacun de ses éléments à l'un des nombres naturels 1, 2, 3, ... : Soit $\alpha_{n,p}$ le n^e chiffre de la mantisse de celui de ces éléments qui correspond au nombre naturel p.

Le n^e chiffre de l'élément qui correspond au nombre naturel n devra donc être $\alpha_{n,n}$; si la correspondance entre les éléments de (E) et l'ensemble des nombres naturels est réalisée, le chiffre $\alpha_{n,n}$ est, par cela même, déterminé dès que l'on se donne n, en d'autres termes la suite $\alpha_{1,1}, \alpha_{2,2}, \ldots, \alpha_{n,n}, \ldots$ est déterminée. Or, un nombre dont la partie entière serait 0, et dans lequel le premier chiffre décimal serait autre que $\alpha_{1,1}$, le second autre que $\alpha_{2,2}$, ..., le n^e autre que $\alpha_{n,n}, \ldots$ appartiendrait à l'ensemble (E) et ne pourrait correspondre à aucun nombre naturel n, puisque son n^e chiffre n'est pas $\alpha_{n,n}$. La contradiction est manifeste.

A fortiori, l'ensemble des nombres réels, dont l'intervalle (0, 1) est une partie, n'est pas dénombrable. Il y a donc (n° **78**), des nombres qui ne sont pas algébriques ; ces nombres sont dits *transcendants*.

On dit de tout ensemble qui a la même puissance que l'ensemble des nombres qui appartiennent à l'intervalle (0, 1) qu'il a la puissance du continu.

80. — Un ensemble infini de nombres ou de points auquel n'appartient aucun de ses points d'accumulation est dénombrable.

Supposons d'abord que l'ensemble considéré (E) soit borné en bas et en haut, et soient m, M ses bornes inférieure et supérieure.

Puisqu'aucun point de (E) n'est point d'accumulation, on peut faire correspondre à chaque point a de cet ensemble un nombre α, que j'appellerai le rayon d'isolement de ce point, tel qu'il n'y ait aucun point de (E), autre que a, qui appartienne à l'intervalle $(a - \alpha, a + \alpha)$ [1]. J'imagine qu'on ait établi une telle correspondance. Il est clair que la distance mutuelle de deux points de l'ensemble dépasse le plus grand des deux rayons d'isolement qui leur correspondent. Considérons maintenant les points de (E) pour lesquels le rayon d'isolement dépasse un nombre positif donné ρ; leurs distances mutuelles dépassent ρ : leur nombre est donc fini, puisque, si l'on divise l'intervalle (m, M) en intervalles partiels

$$(m, a_1), \quad (a_1, a_2), \quad \ldots, \quad (a_n, \mathrm{M})$$

tels que l'écart de chacun d'eux soit moindre que ρ, il ne pourra y avoir, dans chacun de ces intervalles, qu'un seul des points considérés.

Ceci posé, considérons une suite de nombres positifs décroissants

$$\rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad \rho_n, \quad \ldots,$$

tels que l'on ait $\lim\limits_{n=\infty} \rho_n = 0$; on pourra, si l'on veut, prendre

$$\rho_n = \frac{1}{n}.$$

On peut affirmer d'un rayon d'isolement quelconque qu'il est supérieur à ρ_1, ou bien qu'il appartient à l'un des intervalles (ρ_2, ρ_1), (ρ_3, ρ_2), ... Soit (E_1) l'ensemble des points de (E) pour lesquels le rayon d'isolement est supérieur à ρ_1; (E_2) l'ensemble des points de (E) pour lesquel le rayon d'isolement est égal ou inférieur à ρ_1, mais supérieur à ρ_2; (E_3) l'ensemble des points de (E) pour lesquels le rayon d'isolement est égal ou inférieur à ρ_2,

[1] Le choix de ce nombre α, correspondant à a, est arbitraire pourvu que α soit moindre que la distance de a à n'importe quel point de (E) et à n'importe quel point d'accumulation de (E).

mais supérieur à ρ_3, etc.... D'après ce qu'on vient de dire, chacun des ensembles (E_1), (E_2), (E_3), ... ne contient qu'un nombre fini de points [1], et l'ensemble (E) peut être regardé comme formé par la réunion de tous les ensembles (E_1), (E_2), (E_3), ... ; il est donc dénombrable (n° **75**).

Supposons maintenant que l'ensemble (E) ne soit pas borné ; il peut être constitué par la réunion des ensembles formés respectivement par les points de (E) qui appartiennent aux intervalles bornés par deux nombres entiers consécutifs. Chacun des ensembles partiels est encore tel qu'aucun de ses points ne soit un point d'accumulation ; il est borné et par conséquent fini ou dénombrable. Il en est de même de l'ensemble (E) formé par la réunion de tous les ensembles partiels, puisque l'ensemble des intervalles considérés est dénombrable.

81. — Soit (E) un ensemble infini quelconque et (Δ) un ensemble fini ou dénombrable, l'ensemble $(E) + (\Delta)$ des éléments distincts qui appartiennent soit à l'ensemble (E), soit à l'ensemble (Δ) a la même puissance que l'ensemble (E).

Je supposerai d'abord que les ensembles (E) et (Δ) n'ont pas d'élément commun. Jusqu'à ce qu'on lève cette restriction, il en sera de même des ensembles dont on aura, dans le cours de la démonstration, à faire la somme symbolique (n° **70**), c'est-à-dire dont on réunira les éléments dans un même ensemble.

La proposition énoncée a déjà été établie quand l'ensemble (E) est dénombrable, puisque, alors, l'ensemble $(E) + (\Delta)$ est aussi dénombrable (n° **70**) : je suppose, dans ce qui suit, que l'ensemble (E) ne soit pas dénombrable. J'admettrai comme évident qu'il existe un ensemble dénombrable (D) dont tous les éléments appartiennent à (E) [2]. Soit alors (E') l'ensemble des éléments de (E)

[1] Quelques-uns des ensembles (E_1), (E_2), (E_3),... peuvent ne pas exister; on n'aura qu'à les supprimer; la conclusion reste évidemment la même.

[2] Lorsque (E) est un ensemble de points, cette affirmation résulte de ce que l'ensemble (E) admet nécessairement un point d'accumulation, et de la remarque du n° **63** ; pour un ensemble quelconque (E), il est clair qu'on ne sera jamais arrêté dans la formation de l'ensemble (D), en prenant successivement un premier élément dans (E), puis un second, puis un troisième,... quant à une définition plus précise de l'ensemble (D), il ne parait pas y avoir lieu de la chercher si l'on ne définit pas l'ensemble (E) lui-même.

qui ne figurent pas dans (D), en sorte qu'on puisse poser (E) = (E') + (D). L'ensemble (E') existe sûrement, puisque, autrement, l'ensemble (E) serait dénombrable; on peut même observer que l'ensemble (E') ne peut être dénombrable, sans quoi l'ensemble (E) formé de la réunion de deux ensembles dénombrables (E') et (D) serait encore dénombrable. Comparons les deux ensembles (E) + (Δ) et (E') + (D). Le premier peut être regardé comme formé par la réunion des ensembles (E'), (D) et (Δ) ou encore, comme formé par la réunion des deux ensembles (E') et (D'), en désignant par (D') l'ensemble dénombrable (D) + (Δ) des éléments qui appartiennent soit à l'ensemble dénombrable (D), soit à l'ensemble dénombrable (Δ).

Puisque l'ensemble (E) + (Δ) est la même chose que l'ensemble (E') + (D'), tout revient donc à démontrer qu'on peut établir une correspondance parfaite entre les ensembles (E') + (D') et (E) = (E') + (D) : il suffira pour cela de regarder, dans ces deux ensembles, comme se correspondant deux éléments (identiques) qui appartiennent à (E') et deux éléments appartenant l'un à l'ensemble dénombrable (D'), l'autre à l'ensemble dénombrable (D), s'ils correspondent au même nombre naturel.

Si maintenant (E) et (Δ) ont des éléments communs, et si l'on désigne par (Δ_1) l'ensemble des éléments de (Δ) qui n'appartiennent pas à (E), il est clair que l'ensemble (Δ_1) qui est une partie de l'ensemble fini ou dénombrable (Δ) est lui-même fini ou dénombrable ; l'ensemble (E) + (Δ) est alors identique à (E) + (Δ_1) et l'on sait, par la démonstration précédente, que cet ensemble a même puissance que (E).

Si, par exemple, on prend pour (E) l'ensemble des nombres qui constituent l'intervalle (o, 1) on pourra prendre pour (D) l'ensemble des nombres rationnels qui appartiennent à cet intervalle : l'ensemble (E') sera l'ensemble des nombres irrationnels qui appartiennent à l'intervalle (o, 1) : il a la puissance du continu (n° **77**).

On peut exprimer la proposition qui précède en disant qu'un ensemble infini (E) garde la même puissance quand on supprime de cet ensemble des éléments en nombre fini ou formant un ensemble dénombrable, pourvu que l'ensemble restant soit infini. Cette dernière restriction ne concerne d'ailleurs que le cas ou l'ensemble (E) serait dénombrable.

Il est aisé de conclure de là que l'ensemble des nombres réels a la puissance du continu (n° **79**).

En effet, l'ensemble (P) des nombres positifs et du nombre o a la même puissance que l'ensemble des nombres, autres que 1, qui appartiennent à l'intervalle (0, 1), comme on le voit en faisant correspondre à chaque nombre x du premier ensemble le nombre $\frac{x}{x+1}$ du second ensemble.

L'ensemble (N) des nombres négatifs a la même puissance que l'ensemble des nombres, autres que o et — 1, qui appartiennent à l'intervalle (— 1, 0), comme on le voit en faisant correspondre à chaque nombre x du premier ensemble le nombre $\frac{x}{1-x}$ du second.

Donc l'ensemble des nombres réels a la même puissance que l'ensemble des nombres, autres que — 1 et 1, qui appartiennent à l'intervalle (— 1, 1), la même puissance encore que l'ensemble, sans restriction, des nombres qui appartiennent à l'intervalle (— 1, 1), ou (n° **67**) à l'intervalle (0, 1).

82. — Les n^os **50**, **55**, **63**, **72**,... laissent prévoir l'importance du rôle que jouent les points d'accumulation d'un ensemble. Soit (E) un ensemble infini ; l'ensemble de ses points d'accumulation est ce qu'on appelle l'ensemble dérivé de (E) ; je le désignerai par (E'). Si l'ensemble (E') n'existait pas, si l'ensemble (E) n'avait pas de points d'accumulation, on pourrait affirmer que l'ensemble (E) est dénombrable. Si l'ensemble (E') est infini et admet des points d'accumulation, ceux-ci forment un ensemble (E''), l'ensemble dérivé de (E') ou le second dérivé de (E), etc...

Si l'ensemble dérivé (E') de l'ensemble (E) est fini ou dénombrable, l'ensemble (E) est lui-même dénombrable.

Cette proposition a déjà été établie au n° **72** dans le cas où (E') est fini ; dans le cas ou (E') est infini, il suffit de se rappeler que si l'on supprime de (E) les points de (E'), l'ensemble restant (E_1) est dénombrable (n° **80**) : on en conclut que l'ensemble (E), réunion de deux ensembles dénombrables est lui-même dénombrable (n° **70**). En remontant de proche en proche, on voit que si l'un des ensembles dérivés (E'), (E''), ... est fini ou dénombrable, (E) est forcément dénombrable.

83. — Un ensemble (E) est dit *clos* (ou *fermé*) s'il est borné (en bas et en haut) et s'il contient tous ses points d'accumulation, si, en d'autres termes, l'ensemble dérivé (E') de (E) est contenu dans (E).

L'ensemble (E) est isolé s'il ne contient aucun de ses points d'accumulation ; il est alors dénombrable (n° **80**).

Il n'est ni clos ni isolé, s'il contient quelques-uns de ses points d'accumulation sans les contenir tous. Dans tous les cas, pourvu que l'ensemble (E) soit borné (en bas et en haut) l'ensemble (E) + (E') des points qui appartiennent soit à (E) soit à son dérivé (E) est clos. Si, d'un ensemble infini, clos ou non, on supprime tous les points d'accumulation, l'ensemble isolé qui subsiste est fini ou dénombrable.

L'ensemble (U) des nombres distincts qui appartiennent à la suite u_1, u_2, ..., u_n, ..., pour laquelle je suppose qu'on ait $\lim_{n=\infty} u_n = A$, est, en le supposant infini, clos ou non, suivant qu'il y a, ou qu'il n'y a pas, de terme de la suite qui soit égal à A. L'ensemble des nombres réels plus grands que 0 et plus petits que 1 n'est pas clos, puisque 0 et 1 sont des points d'accumulation de cet ensemble, qui ne lui appartiennent pas.

84. — Soit (E) un ensemble clos : si la suite

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots.$$

a une limite α et si tous les termes de cette suite appartiennent à (E), en sorte que l'ensemble (A) des termes distincts de cette suite soit contenu dans (E) on peut affirmer que α appartient à (E).

Si, en effet, l'ensemble (A) est infini, α est un point d'accumulation de l'ensemble (A) contenu dans l'ensemble (E), c'est donc un point d'accumulation de (E), donc un point de (E) puisque (E) est clos. Si l'ensemble (A) est fini, c'est qu'il y a dans la suite une infinité de termes égaux à α, α est donc un point de (E), puisque tous les termes de la suite appartiennent à (E).

85. — Soit (E) un ensemble infini borné. Son dérivé (E') est aussi borné ; (n° **51**). Je dis qu'il est clos, s'il est infini.

Soit en effet, dans cette hypothèse, a' un point d'accumulation de (E) ; il y a des points de (E') [c'est-à-dire des points d'accumula-

tion de (E)] qui sont aussi voisins qu'on le veut de a' ; il y a donc des points de (E) aussi voisins qu'on le veut de a', en d'autres termes a' est un point d'accumulation de (E), donc a' appartient à (E') [1].

L'ensemble (E') est donc clos.

86. — Un ensemble (E) borné en haut et en bas, est dit *parfait* lorsqu'il est identique à son dérivé. En d'autres termes (E) est parfait, s'il est clos, et si chacun de ses points est un point d'accumulation. Par exemple l'ensemble des nombres réels qui appartiennent à un intervalle (a, b) est parfait.

L'ensemble des nombres rationnels qui appartiennent à l'intervalle $(0, 1)$ est bien tel que chacun de ses points soit un point d'accumulation ; mais tout nombre irrationnel qui appartient à ce même intervalle est évidemment un point d'accumulation de l'ensemble des nombres rationnels qui, ainsi, n'est ni clos, ni parfait.

87. — Un ensemble (E) est dit *dense* dans un intervalle (a, b) si tout point de cet intervalle est un point d'accumulation pour l'ensemble. Par exemple l'ensemble des nombres rationnels, ou l'ensemble des nombres irrationnels, est dense dans tout intervalle.

Un ensemble dense dans tout intervalle peut être dénombrable.

Un ensemble (E) est *non-dense* dans un intervalle (a, b), s'il n'a aucun intervalle (a', b') (non nul), contenu dans (a, b), tel que l'ensemble (E) soit dense dans (a', b').

[1] Cette proposition a déjà été établie au n° **64**, mais dans un sens un peu différent, puisqu'il s'agissait alors des points d'accumulation d'une suite, non d'un ensemble.

CHAPITRE III

SÉRIES, PRODUITS INFINIS, ETC.

I. — DÉFINITION DES SÉRIES ET DES PRODUITS INFINIS. CONVERGENCE ABSOLUE

88. — Soit

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots,$$

une suite infinie de nombres ; on désigne sous le nom de *série* un symbole tel que

$$(u) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

On dit que cette série est convergente si la somme

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

de ses n premiers termes ([1]) tend vers une limite, quand n augmente indéfiniment. Cette limite s'appelle la *somme* de la série ; en la désignant par S, on pose ([2])

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{n=\infty} u_n,$$

([1]) Pour la généralité de l'écriture, on regardera s_1, comme étant égal à u_1.

([2]) Le signe $\sum$ est employé couramment pour désigner la somme de termes affectés d'un indice, ou, si l'on veut, dont chacun dépend d'un certain nombre entier, et l'on indique de différentes façons les valeurs que doit prendre ce nombre entier. Ainsi les symboles

$$\sum_{n=1}^{n=p} u_n, \quad \sum u_n, \quad (n = 1, \; 2, \; \ldots, \; p)$$

ont la même signification que $s_p = u_1 + u_2 + \ldots + u_p$.

Si la somme s_n ne tend pas vers une limite, quand n augmente indéfiniment, on dit que la série est *divergente* ; il n'y a plus lieu

Le symbole

$$\sum_{n=p}^{n=p+q} u_n$$

signifiera $u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_{p+q}$; si q était nul, on lui donnerait la signification u_p.

Les symboles

$$\sum \frac{1}{n} \quad (n = 1, 3, 5, \dots, 2p-1), \qquad \sum_{n=1}^{n=p} \frac{1}{2n-1}$$

ont la même signification, à savoir

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2p-1}.$$

L'écriture $\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n$ a la même signification que

$$\lim_{p=\infty} \left(\sum_{n=1}^{n=p} u_n \right).$$

Si l'on s'arrêtait à cette signification précise, il ne serait pas permis de parler de la *convergence* et surtout de la *divergence* de la *série*

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n$$

puisque l'écriture précédente signifierait une limite déterminée.

Toutefois il est commode de regarder aussi cette façon d'écrire comme un pur symbole, où l'attention est surtout portée sur la succession des éléments $u_1, u_2, u_3, \dots$, et de dire, de ce symbole, qu'il est une série convergente ou une série divergente.

Cette double signification, qui facilite le langage, ne crée aucune confusion pourvu qu'on n'introduise dans les calculs le symbole $\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n$ que dans le cas d'une série convergente, avec le sens de somme. Ces observations s'appliqueront aux symboles tels que $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} u_n$ qui seront définis plus loin.

Enfin, quand le sens n'est pas douteux, on peut se dispenser de spécifier les

de parler de la somme de la série, et les symboles

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} u_n$$

n'ont plus de sens [1].

89. Si l'on se donne la suite

$$s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_n, \quad \ldots,$$

on peut former une série

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

dans laquelle la somme des n premiers termes sera s_n : il suffit, en regardant les quantités s_n comme données, de déterminer les u_n par les équations

$$s_1 = u_1, \quad \ldots, \quad s_n = s_{n-1} + u_n,$$

ou

$$u_1 = s_1, \quad u_2 = s_2 - s_1, \quad \ldots, \quad u_n = s_n - s_{n-1}, \quad \ldots$$

On voit par là comment, en partant d'une suite qui a une limite, on peut former une série convergente qui a cette limite pour somme, comment, en partant au contraire d'une suite qui n'a pas de limite, on peut former une série divergente : et il est manifeste que l'on pourra former des séries, dans lesquelles la somme des n premiers termes présentera, quand n augmente indéfiniment les diverses circonstances décrites aux n^{os} **52, 60, 63**. Cette somme pourra grandir indéfiniment, osciller entre certaines limites, etc.

Si, par exemple, on prend $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, il est clair qu'on a

valeurs que doit prendre n ; ainsi, il m'arrivera fréquemment de dire « la série $\sum u_n$ » au lieu de « la série dont le n^e terme est u_n ».

Cette façon de parler doit être évitée avec soin quand il peut y avoir quelque ambiguïté.

[1] Des travaux récents, dont il ne sera pas question ici, ont montré qu'on pouvait leur attribuer une signification dans certains cas et les utiliser, avec certaines précautions, dans les raisonnements et les calculs. Voir en particulier les *Leçons sur les séries divergentes* de M. Borel.

$\lim\limits_{n=\infty} s_n = 1$; la série dont le n^e terme u_n est égal à

$$s_n - s_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)},$$

c'est-à-dire la série

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

est convergente et sa somme est égale à 1.

Si l'on prend

$$s_n = \frac{(-1)^n}{2} - \frac{1}{n+1},$$

il est clair que s_n, pour les grandes valeurs de n, sera voisin de $\frac{1}{2}$ ou de $-\frac{1}{2}$ suivant que n sera pair ou impair ; dans la série dont le n^e terme est

$$\frac{1 + (-1)^n n(n-1)}{n(n+1)},$$

c'est-à-dire dans la série

$$\frac{1 - 1.2}{1.2} + \frac{1 + 2.3}{2.3} + \frac{1 - 3.4}{3.4} + \ldots + \frac{1 + (-1)^n n(n+1)}{n(n+1)} + \ldots,$$

la somme des n premiers termes, pour les grandes valeurs de n, est voisine tantôt de $\frac{1}{2}$, tantôt de $-\frac{1}{2}$: la série est divergente.

En partant d'une suite s_1, s_2, ..., pour laquelle on aurait $\lim\limits_{n=\infty} s_n = +\infty$, on formerait une série divergente, dans laquelle la somme des n premiers termes grandirait indéfiniment avec n.

Considérons encore l'identité

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x} ;$$

lorsque n augmente indéfiniment, le second membre (n° **62**) a pour limite $\frac{1}{1-x}$ quand x est plus petit que 1 en valeur absolue, et augmente indéfiniment, en valeur absolue, quand x est, en valeur absolue, plus grand que 1. On en conclut que la série

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$$

est convergente et a pour somme $\frac{1}{1-x}$, quand on a $|x| < 1$, qu'elle est divergente quand on a $|x| > 1$: on voit encore, directement, qu'elle est divergente pour $x = 1$, puisque la somme de ses n premiers termes est égale à n ; pour $x = -1$ la série se réduit à

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots.$$

la somme de ses n premiers termes est alternativement 1 et 0, elle est divergente.

90. — Si la série

$$(u) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est convergente, on peut grouper ensemble des termes qui se suivent, par exemple les α_1 premiers termes, puis les α_2 termes suivants, puis les α_3 termes suivants, ...; la série

$$(v) \qquad v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$$

où l'on supposera

$$v_1 = \sum_{n=1}^{n=\alpha_1} u_n, \qquad v_2 = \sum_{n=\alpha_1+1}^{n=\alpha_2} u_n, \qquad v_3 = \sum_{n=\alpha_2+1}^{n=\alpha_3} u_n, \ldots$$

sera convergente et aura même somme que la proposée ; en effet la somme de ses p premiers termes sera $s_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_p}$, en désignant par s_n la somme des n premiers termes de la série (u) : or si la suite $s_1, s_2, s_3, \ldots$ a une limite, on sait que cette limite est la même que celle de la suite $s_{n_1}, s_{n_2}, \ldots s_{n_p}, \ldots$ dans laquelle $n_1, n_2, \ldots n_p, \ldots$ est une suite quelconque d'entiers qui croissent indéfiniment (n° **73**). Réciproquement si l'on part d'une série (v) dont les termes soient chacun des sommes de termes mis entre parenthèses, on peut supprimer ces parenthèses et transformer la série (v) en une série telle que (u), *pourvu que cette dernière soit convergente*. Cela résulte du théorème direct [1].

[1] La convergence de la série (v), si on la suppose, n'implique pas la convergence de la série (u) ; on verra plus tard, toutefois, que la convergence de l'une quelconque des deux séries implique celle de l'autre, si elles sont toutes deux formées de termes positifs ou nuls.

91. — Il serait naturel de dire, par analogie avec les séries, que le *produit infini*

(P) $$u_1 u_2 \ldots u_n \ldots,$$

ou [1]

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} u_n$$

est convergent quand la suite infinie

(*p*) $$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n, \quad \ldots,$$

dans laquelle on suppose

$$p_1 = u_1, \quad p_2 = u_1 u_2, \quad \ldots, \quad p_n = u_1 u_2 \ldots u_n, \ldots,$$

a une limite et d'appeler *valeur du produit infini* la limite de p_n, pour n infini ; toutefois, *pour le moment*, je ne regarderai un tel produit comme convergent que si cette limite est différente de o ; ainsi le produit infini

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} \cdots,$$

pour lequel on a

$$p_n = \frac{1}{1.\, 2.\, 3 \ldots n},$$

tend et qui vers o quand n augmente indéfiniment, ne doit

[1] Le signe $\prod$ s'emploie pour les produits de la même façon que le signe $\sum$ pour les sommes (note du n° 88) : ainsi

$$\prod_{n=1}^{n=r} u_n, \qquad \prod u_n \quad (n = 1, \; 2, \; \ldots \; r),$$

ont même signification que $u_1 u_2 \ldots, u_r$; le symbole

$$\prod_{n=p}^{n=p+q} u_n$$

a la même signification que $u_p u_{p+1} \ldots u_{p+q}$; si q était nul, on lui donnerait le même sens qu'à u_p, etc...

pas être regardé comme convergent ; un produit infini convergent, dans le sens restreint du mot, ne peut admettre aucun facteur nul.

L'identité

$$\frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x} = \frac{1 - x^2}{1 - x}\,\frac{1 - x^4}{1 - x^2}\cdots\frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x^{2^n}}$$

$$= (1 + x)(1 + x^2)\dots(1 + x^{2^n}),$$

montre que le produit infini $\prod_{n=1}^{n=\infty}(1 + x^{2^n})$ est convergent, $\left(\text{et que sa valeur est } \frac{1}{1-x}\right)$, quand la valeur absolue de x est plus petite que 1. Le même produit est divergent pour les autres valeurs de x.

Au reste, on peut faire sur les produits infinis une remarque toute pareille à celle que l'on a faite sur les suites : Si l'on part de la suite infinie $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$, dans laquelle on supposera seulement qu'aucun terme ne soit nul, le produit infini $u_1 u_2, \dots u_n, \dots$, où l'on a posé

$$u_1 = p_1, \qquad u_2 = \frac{p_2}{p_1}, \qquad \dots, \qquad u_n = \frac{p_n}{p_{n-1}},$$

sera tel que le produit de ses n premiers facteurs soit p_n ; les conclusions sont pareilles à celles du n° **89**.

92. — Il est clair que les deux séries

(S) $\qquad u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots,$

(S') $\qquad u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p} + \dots$

sont convergentes ou divergentes en même temps, car si l'on désigne par s_n la somme des n premiers termes de la première, par s'_r la somme des r premiers de la seconde, on aura $s_{n+r} = s_n + s_r$, quel que soit le nombre naturel r ; puisque s_n en fixe, il est clair que si, pour r infini, l'une des sommes s'_r, s_{n+r} a une limite, il en est de même de l'autre ; il est clair aussi que la différence entre leurs limites, si elles existent, est égale à s_n. Les séries sont convergentes ou divergentes en même temps. Dans le cas de

la convergence, la somme de la série S′ s'appelle le reste de la série S, limitée au n^e terme.

De même, si l'un des deux produits infinis

$$u_1 u_2 \ldots u_n u_{n+1} u_{n+2} \ldots,$$
$$u_{n+1} u_{n+2} \ldots u_{n+p} \ldots,$$

est convergent (au sens du n° **91**), il en est de même de l'autre, et, dans ce cas, la valeur du premier produit infini est égale à celle du second multipliée par $u_1 u_2 \ldots, u_n$.

Cette remarque est utile lorsqu'on a à décider de la convergence ou de la divergence d'une série ou d'un produit infini dont les premiers termes présentent quelque irrégularité.

93. — En se reportant au n° **54**, on aperçoit immédiatement la vérité des propositions suivantes.

Si les séries

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \qquad v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots,$$

sont convergentes et admettent pour sommes les nombres S et T, les séries

$$au_1 + au_2 + \ldots + au_n + \ldots,$$
$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \ldots + (u_n + v_n) + \ldots,$$
$$(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + \ldots + (u_n - v_n) + \ldots$$

sont aussi convergentes et admettent pour sommes aS, S + T, S — T ; le lecteur trouvera sans peine des énoncés analogues pour les produits infinis. Il est clair que la proposition concernant la somme de deux séries s'étend à un nombre fini quelconque de séries.

94. — D'après la proposition du n° **56**, pour qu'une série

(S) $$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

soit convergente il faut et il suffit qu'à chaque nombre positif ε corresponde un nombre naturel r tel que l'on ait, en désignant par n et m des nombres naturels

$$|s_{n+m} - s_n| = |u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+m}| < \varepsilon,$$

sous la seule condition $n > r$. En particulier, si la série est conver-

gente, $u_{n+1} = s_{n+1} - s_n$ doit tendre vers zéro, quand n augmente indéfiniment : cette dernière condition ne suffit pas d'ailleurs à la convergence, comme on le verra plus tard. De la proposition générale résultent immédiatement celles-ci :

Quand une série est convergente et a tous ses termes positifs, elle reste convergente quand on modifie le signe de tel terme que l'on veut, ou quand on remplace un ou plusieurs termes par des nombres plus petits, en valeur absolue : en effet, dans la série modifiée, la somme $| u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots u_{n+m} |$ est au plus égale à la somme analogue dans la série proposée.

Quand une série a tous ses termes positifs et qu'elle est convergente, il en est de même de toute série qui s'en déduit par la suppression d'un nombre fini ou infini de termes, de tous les termes de rang pair par exemple. On retrouvera plus tard ces propositions en suivant une autre voie.

Considérons le produit infini

$$\text{(P)} \qquad u_1 u_2 \ldots u_n \ldots,$$

dont je suppose qu'aucun facteur ne soit nul ; je désignerai par p_n le produit des n premiers facteurs. Pour que ce produit p_n ait une limite quand n augmente indéfiniment, il faut et il suffit qu'à chaque nombre positif ε réponde un nombre naturel r tel que l'on ait, quels que soient les nombres naturels $n > r$ et m,

$$(1) \qquad | p_{n+m} - p_n | = | p_n | \, | 1 - u_{n+1} u_{n+2} \ldots u_{n+m} | < \varepsilon.$$

Or, si le produit P est convergent, la limite de p_n, pour n infini, est différente de 0 ; par conséquent les termes de la suite $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ seront, à partir d'un certain rang ρ, supérieurs en valeur absolue, à un nombre positif α ; si l'on désigne par β le plus petit des nombres $| p_1 |, | p_2 |, \ldots, | p_\rho |, \alpha$, dont aucun n'est nul, l'inégalité (1) entraînera l'inégalité

$$| 1 - u_{n+1} u_{n+2} \ldots u_{n+m} | < \frac{\varepsilon}{\beta},$$

et cela, quel que soit le nombre naturel m ; en remplaçant ε par $\beta\eta$, on peut dire encore que, si le produit infini (P) est convergent, au sens du n° **91**, à chaque nombre positif η doit correspondre un

nombre naturel r tel qu'on ait, quels que soient les nombres naturels $n > r$ et m.

$$(2)\qquad \left| 1 - \frac{p_{n+m}}{p_n} \right| = | 1 - u_{n+1}u_{n+2} \ldots u_{n+m} | < \eta.$$

Inversement, si à chaque nombre positif η correspond un nombre naturel r tel que l'inégalité (2) soit vérifiée quels que soient les nombres naturels $n > r$ et m, le produit infini (P) sera convergent au sens du n° **91**.

Tout d'abord, si cette condition est vérifiée, les nombres p_1, p_2, ... sont tous inférieurs, en valeur absolue, à un nombre positif fixe A. En effet si, le nombre η étant choisi arbitrairement, on lui fait correspondre le nombre naturel r de manière que l'inégalité (2) soit vérifiée, on aura, quel que soit le nombre naturel $n > r$,

$$(3)\qquad \left| 1 - \frac{p_n}{p_{r+1}} \right| < \eta\,;$$

cette inégalité est évidente pour $n = r + 1$; elle résulte pour les valeurs de n supérieures à $r + 1$, de l'inégalité (2) où l'on remplace n par $r + 1$ et $n + m$ par n. Or l'inégalité (3) entraîne $|p_n| < (1 + \eta)\,|p_{r+1}|$, en vertu de la note du n° **54** : tous les nombres p_1, p_2, ... seront donc inférieurs ou égaux au plus grand A des nombres $|p_1|$, $|p_2|$, ..., $|p_r|$, $(1 + \eta)\,|p_{r+1}|$.

Dès lors, il suffira, dans l'inégalité (2) de remplacer η par $\frac{\varepsilon}{A}$ pour voir qu'à chaque nombre positif ε correspond un nombre naturel r tel que l'on ait $|p_{n+m} - p_n| < \varepsilon$, quels que soient les nombres naturels $n > r$ et m. Il en résulte (n° **56**) que p_n a une limite pour n infini ; cette limite n'est pas nulle, car l'inégalité (3) entraîne aussi $|p_n| > (1 - \eta)\,|p_{r+1}|$, en supposant que η ait été pris plus petit que 1.

En particulier, pour que le produit infini (P) soit convergent, il faut que la quantité $|1 - u_n|$ tende vers 0 quand n augmente indéfiniment ; cette dernière condition, toutefois, n'est pas suffisante.

On a l'habitude, qui sera suivie désormais, d'écrire un produit infini sous la forme

$$(1 + v_1)(1 + v_2) \ldots (1 + v_n) \ldots ;$$

alors, si le produit infini est convergent, les quantités v_n tendent vers o quand n augmente indéfiniment. J'appellerai v_n le n^e *terme*, $1 + v_n$ le n^e facteur du produit infini.

95. — Si la série $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ a tous ses termes ou positifs ou nuls, les termes de la suite

$$s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1 + u_2, \quad s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \quad \ldots,$$

vont constamment en croissant, ou plutôt ne décroissent jamais. Par conséquent, ou bien s_n tend vers une limite qui est alors (n° **57**) la borne supérieure de l'ensemble des nombres distincts de la suite $s_1, s_2, s_3, \ldots$, ou bien s_n croît indéfiniment avec n. On est dans le premier cas, et la série est convergente, si s_n reste, quelque soit, n, inférieur à un nombre fixe A ; alors la somme de la série est au plus égale à A, et il en est de même de la somme d'autant de termes que l'on voudra, pris dans la suite $u_1, u_2, \ldots$, puisque l'on peut prendre n assez grand pour que la somme s_n enveloppe tous ces termes. On est dans le second cas, et la série est divergente lorsque, quelque soit le nombre positif A, on peut prendre dans cette suite assez de termes pour que leur somme dépasse A.

Une série à termes positifs ou nuls est donc convergente ou divergente suivant que l'ensemble (E) des nombres distincts que l'on obtient en faisant la somme de tels termes de la série que l'on voudra est borné en haut, ou ne l'est pas. Soit S la somme de la série supposée convergente. Tout élément de (E) est inférieur ou égal à S.

D'ailleurs, si a est un nombre plus petit que S, il y a dans la suite $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$, et par suite dans (E) un terme plus grand que a. En d'autres termes, S, que l'on savait être la borne supérieure de l'ensemble des nombres distincts contenus dans la suite $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ est aussi bien la borne supérieure de l'ensemble (E). S ne peut d'ailleurs appartenir à (E) que dans le cas où tous les termes de la série, à partir d'un certain rang, sont nuls.

Puisque l'ensemble (E) ne dépend pas de l'ordre des termes de la série, la convergence ou la divergence d'une série à termes positifs

ou nuls, la somme d'une telle série supposée convergente, ne peuvent non plus dépendre de cet ordre [1].

On voit aussi que si une série à termes positifs ou nuls est convergente, il en est de même de toute série déduite de la première en ne conservant qu'une partie de ses termes, ou en remplaçant certains de ses termes par des nombres, toujours positifs ou nuls, qui leur soient respectivement inférieurs ou égaux. La somme de la seconde série est inférieure ou égale à la somme de la première. En particulier, la somme d'autant de termes qu'on voudra, pris après le n^e, est au plus égale au reste.

Considérons par exemple la série

$$1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{a^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

où a est un nombre positif quelconque; si l'on suppose n égal ou supérieur à la partie entière de a, les termes qui suivent le dernier de ceux qu'on a écrits sont respectivement égaux ou inférieurs à

$$\frac{a^n}{1.2\ldots n}\frac{a}{n+1}, \quad \frac{a^n}{1.2\ldots n}\left(\frac{a}{n+1}\right)^2, \quad \frac{a^n}{1.2\ldots n}\left(\frac{a}{n+1}\right)^3\ldots,$$

lesquels forment une série convergente dont la somme est

$$\frac{a^n}{1.2\ldots n}\frac{a}{n+1-a},$$

en sorte que les termes qui suivent le $(n+1)^e$ dans la série proposée forment une série convergente; la série proposée est donc elle-même convergente et son reste, quand on la limite au $(n+1)^e$ terme, est moindre que la quantité qu'on vient de calculer.

Les propriétés évidentes des séries à termes positifs ou nuls sur lesquelles on vient d'appeler l'attention suffisent à établir l'importante proposition que voici.

[1] On a défini au n° **74** ce que c'est que deux *suites* composées des mêmes termes rangés dans un ordre différent : cette définition s'applique immédiatement à deux séries.

96. — La série

$$(1)\qquad \frac{1}{1^{1+\alpha}} + \frac{1}{2^{1+\alpha}} + \frac{1}{3^{1+\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{1+\alpha}} + \dots,$$

est convergente si α est positif, divergente si α est nul ou négatif ([1]).

Considérons en effet les termes de cette série qui correspondent à ceux des nombres entiers qui admettent un même nombre de chiffres, p par exemple : il y a $10^p - 10^{p-1} = 9 \times 10^{p-1}$ tels nombres : chacun d'eux est supérieur ou égal à 10^{p-1} et plus petit que 10^p : chacun des termes correspondants de la série est donc inférieur ou égal à $\frac{1}{10^{(p-1)(1+\alpha)}}$ et plus grand que $\frac{1}{10^{p(1+\alpha)}}$, et leur somme est comprise entre

$$\frac{9 \times 10^{p-1}}{10^{p(1+\alpha)}} = \frac{9}{10^{1+p\alpha}} \qquad \text{et} \qquad \frac{9 \times 10^{p-1}}{10^{(p-1)(1+\alpha)}} = \frac{9}{10^{(p-1)\alpha}}.$$

Ceci posé, désignons par s_n la somme des n premiers termes de la série (1), on pourra prendre dans la série

$$(2)\qquad 9 + \frac{9}{10^{\alpha}} + \frac{9}{10^{2\alpha}} + \dots + \frac{9}{10^{(p-1)\alpha}} + \dots,$$

assez de termes pour que leur somme dépasse s_n : or, si α est positif, les termes de la série (2) sont les termes d'une progression géométrique décroissante dont la raison est $\frac{1}{10^{\alpha}}$; la somme d'autant de termes que l'on veut est inférieure à

$$\frac{9 \cdot 10^{\alpha}}{10^{\alpha} - 1}.$$

On a donc, quel que soit n,

$$s_n < \frac{9 \cdot 10^{\alpha}}{10^{\alpha} - 1}.$$

([1]) On doit supposer ici α rationnel, mais cette restriction se lèvera d'elle-même dès que l'on aura défini le sens qu'il convient d'attribuer aux exposants irrationnels. La même observation s'appliquera d'ailleurs plusieurs fois dans ce chapitre.

La série (1) est convergente.

De même, quel que soit le nombre de termes que l'on prenne dans la série

$$(3) \qquad \frac{9}{10^{1+\alpha}} + \frac{9}{10^{1+2\alpha}} + \ldots + \frac{9}{10^{1+i\alpha}} + \ldots,$$

on peut prendre n assez grand pour que s_n dépasse la somme de ces termes : or, si α est nul ou négatif, les termes de cette suite sont égaux ou supérieurs à $\frac{9}{10}$; on peut prendre assez de ces termes pour que leur somme dépasse tel nombre que l'on voudra ; dans ce cas la série (1) est divergente ; si α est positif, on voit que l'on pourra toujours supposer n assez grand pour que l'on ait

$$s_n \geqq \frac{9}{10^{1+\alpha} - 10},$$

en sorte que, dans ce cas, la somme de la série (1) est comprise entre

$$\frac{9}{10^{1+\alpha} - 10} \quad \text{et} \quad \frac{9 \cdot 10^{\alpha}}{10^{\alpha} - 1};$$

on aurait pu faire le même raisonnement en supposant que la base de la numération fût un nombre entier positif quelconque a, autre que 1, et l'on aurait trouvé pour les deux nombres entre lesquels la somme de la série doit être comprise,

$$\frac{a-1}{a^{1+\alpha} - a} \quad \text{et} \quad \frac{(a-1)\,a^{\alpha}}{a^{\alpha} - 1}.$$

97. — La proposition précédente est un cas particulier d'un théorème dû à Cauchy, et dont la démonstration est, au fond, identique à celle qu'on vient de lire. Voici ce théorème ([1]).

Soit

$$(u) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

une série à termes positifs, pour laquelle je suppose qu'on ait

([1]) Dans les *Leçons sur les séries à termes positifs* de M. Borel, on pourra en voir toute la portée.

$u_{n+1} \leqq u_n$, pour toutes les valeurs de n. Si, en désignant par a un entier quelconque plus grand que 1, on pose en général

$$v_n = a^n u_{a^n},$$

la série (u) sera convergente ou divergente en même temps que la série

$$(v) \qquad v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

Si l'on suppose $q > p$, la somme des $q - p$ termes consécutifs de la série (u), dont le premier est u_p et le dernier u_{q-1} est comprise entre $(q-p)\,u_q$ et $(q-p)\,u_p$, ou bien égale à l'une de ces quantités, à cause de la supposition $u_{n+1} \leqq u_n$. Ceci posé, soient $\alpha, \beta, \ldots, \mu, \nu$ des nombres naturels croissants : appliquons la remarque précédente aux groupes de termes de la série (u) formés par les $\alpha - 1$ premiers termes, les $\beta - \alpha$ termes suivants, les $\gamma - \beta$ suivants, ..., les $\nu - \mu$ suivants ; on en conclura que la somme $S_{\nu-1}$ des $\nu - 1$ premiers termes de la série (u) est comprise entre les deux quantités

$$(\alpha - 1)\,u_\alpha + (\beta - \alpha)\,u_\beta + (\gamma - \beta)\,u_\gamma + \ldots + (\nu - \mu)\,u_\nu,$$
$$(\alpha - 1)\,u_1 + (\beta - \alpha)\,u_\alpha + (\gamma - \beta)\,u_\beta + \ldots + (\nu - \mu)\,u_\mu,$$

ou bien égale à l'une ou à l'autre.

Si maintenant on suppose que les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ forment une progression géométrique de $r+1$ termes, dont la raison et le premier terme soient égaux au nombre entier a, plus grand que 1, on aura

$$\beta - \alpha = a(a-1), \quad \gamma - \beta = a^2(a-1), \quad \ldots, \quad \nu - \mu = a^r(a-1);$$

si l'on se reporte à la définition de la série (v) et si l'on désigne par T_n la somme des n premiers termes de cette série, on voit qu'on a établi les inégalités

$$\frac{a-1}{a}\,T_{r+1} \leqq S_{\nu-1} \leqq (a-1)\,(u_1 + T_r),$$

qui contiennent la démonstration de la proposition énoncée ; en effet si la série (v) est convergente, T_r reste inférieur à un nombre fixe, donc aussi $S_{\nu-1}$, quel que soit r ; comme $\nu - 1 = a^{r+1} - 1$

peut dépasser tel nombre qu'on voudra, la somme d'autant de termes qu'on voudra, dans la série (u), est inférieure à un nombre fixe : cette série est convergente. Au contraire, si la série (v) est divergente, T_{r+1} et par suite $S_{\nu-1}$, peut dépasser tel nombre qu'on voudra : la série (u) est divergente.

En prenant

$$u_n = \frac{1}{n^{1+\alpha}},$$

on a

$$v_r = \frac{a^r}{a^{r(1+\alpha)}} = \frac{1}{a^{r\alpha}};$$

la série (v) est une progression géométrique dont la raison est $a^{-\alpha}$, convergente si α est positif, divergente si α est nul ou négatif : on retrouve le théorème du numéro précédent.

98. On dit qu'une série est absolument convergente, lorsque la série obtenue en y remplaçant chaque terme par sa valeur absolue est convergente. Qu'une série absolument convergente, en ce sens, soit convergente au sens qui a été donné à ce mot au début de ce chapitre, c'est ce qui a été déjà démontré n° **94**. Au surplus, on va le prouver directement et démontrer en même temps que la *somme* d'une série absolument convergente est la différence entre les sommes de deux séries formées, l'une avec les termes positifs, l'autre avec les valeurs absolues des termes négatifs de la série proposée.

Soit (S) une série absolument convergente, contenant une infinité de termes positifs et de termes négatifs ; soient (S') et (S'') les deux séries formées, l'une avec les termes positifs de (S) rangés dans l'ordre où ils se présentent dans (S), l'autre avec les valeurs absolues des termes négatifs de (S) rangés aussi dans l'ordre où ils se présentent. Soit Σ la somme de la série formée avec les valeurs absolues des termes de (S) ; soit enfin s_n la somme des n premiers termes de (S), s'_n la somme des n' termes positifs compris parmi ces n termes et s''_n la somme des valeurs absolues des n'' termes négatifs contenus dans s_n. On a :

$$s_n = s'_n - s''_n, \qquad s'_n < \Sigma, \qquad s''_n < \Sigma$$

Quand n augmente, s'_n et s''_n ne diminuent jamais ; quand n augmente indéfiniment, ces mêmes sommes s'_n et s''_n, toujours inférieures à Σ, tendent vers des limites S', S'' et, par suite, $s_n = s'_n - s''_n$ tend vers la limite S' — S'' ; il est d'ailleurs bien aisé de voir que S', S'' sont les sommes des séries (S'), (S'') ; d'abord ces séries sont convergentes, puisque la somme d'autant de termes que l'on voudra, pris dans l'une ou dans l'autre, ne peut dépasser Σ ; puis, quand n augmente indéfiniment, il en est de même de n' et de n'', sans quoi il n'y aurait dans (S) qu'un nombre limité de termes positifs ou négatifs ; donc, lorsque n augmente indéfiniment, s'_n et s''_n, c'est-à-dire les sommes des n' premiers termes de la série (S') d'une part, des n'' premiers termes de la série (S'') de l'autre, ne peuvent tendre vers d'autres limites que les sommes respectives S', S'' de ces séries. C'est ce qu'il fallait établir.

S'il n'y avait, dans la série absolument convergente donnée, qu'un nombre limité de termes négatifs, par exemple, la somme de la série serait encore S' — S'', en conservant à S' sa signification et en désignant par S'' la somme des valeurs absolues des termes négatifs.

99. — Dans une série absolument convergente, on peut, sans changer la somme de la série, changer l'ordre des termes.

La signification qu'il faut attribuer à cette expression « changer l'ordre des termes » a été précisée au n° **74**, à propos des suites.

La proposition énoncée a été établie au n° **95** pour ce qui concerne les séries à termes positifs.

Il suffit de se rappeler qu'une série absolument convergente est égale à la différence entre les sommes de deux séries à termes positifs formées, l'une avec les termes positifs de la série proposée, l'autre avec les valeurs absolues des termes négatifs, et d'observer que, en vertu du précédent raisonnement, les sommes de ces deux séries restent invariables quand on modifie l'ordre de leurs termes pour être bien assuré qu'on peut, sans changer la somme d'une série absolument convergente, changer l'ordre de ses termes.

On verra plus loin qu'il n'en est pas de même pour les séries qui ne sont pas absolument convergentes. Toutefois, même pour celles-là, il est clair que l'on peut changer l'ordre d'un nombre *fini* de

termes, car alors, à partir d'un certain rang, les sommes des n premiers termes ne sont pas modifiées.

100. — Les conclusions énoncées à la fin du n° **95** entraînent évidemment celles-ci :

Toute série dont les termes sont respectivement égaux ou inférieurs, en valeur absolue, aux termes de même rang d'une série convergente, à termes positifs ou nuls, est absolument convergente. La somme de la première série est au plus égale, en valeur absolue, à la somme de la seconde.

Une série absolument convergente reste absolument convergente quand on supprime une partie de ses termes.

La série obtenue en ajoutant terme à terme (n° **93**) deux séries absolument convergentes est de même absolument convergente.

II. — SÉRIES A ENTRÉE MULTIPLE

101. — Jusqu'ici on a affecté chaque terme d'une série d'un indice égal au rang de ce terme, cette façon d'écrire n'a rien de nécessaire ; les symboles

$$v_0 + v_1 + v_2 + v_3 + \dots,$$
$$v_{-1} + v_0 + v_1 + v_2 + \dots,$$
$$v_{-1} + v_{-2} + v_{-3} + v_{-4} + \dots,$$
$$v_1 + v_3 - v_5 + v_7 + \dots$$

sont aussi clairs que le symbole

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots ;$$

la somme des n premiers termes de la première, de la seconde, de la troisième, de la quatrième série seront respectivement $v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$, $v_{-1} + v_0 + \dots + v_{n-2}$, $v_{-1} + v_{-2} + \dots + v_{-n}$, $v_1 + v_3 + \dots + v_{2n-1}$; les séries seront convergentes ou divergentes suivant que cette somme tendra, ou ne tendra pas, vers une

limite, quand n augmente indéfiniment. Quand il s'agit de séries absolument convergentes, on peut aller plus loin et ne tenir aucun compte de l'ordre des termes ; il y a un intérêt évident à présenter les choses de façon que l'idée d'ordre n'intervienne plus, au moins sous la forme particulière qu'on lui a donnée jusqu'ici.

102. — Dans le chapitre II, on n'a considéré que des ensembles dont tous les éléments étaient distincts : Remarquons qu'il n'y aurait aucune difficulté à concevoir des ensembles où plusieurs éléments seraient identiques ; pour éviter toute confusion, je n'emploierai pas le mot ensemble dans ce cas, je le remplacerai par le mot agrégat : un agrégat sera défini, si l'on définit les éléments distincts qui y figurent, et si l'on dit de chacun de ces éléments combien de fois il y figure : cette notion est aussi claire que celle d'ensemble ; elle suppose que chaque élément ne figure dans l'agrégat qu'un nombre fini de fois.

Remarquons, en passant, que si une série est convergente, un terme (non nul) ne peut y figurer qu'un nombre fini de fois, puisque le n^e terme doit tendre vers o quand n augmente indéfiniment. Quant aux termes nuls, il est loisible de n'en pas tenir compte. Dès lors, il est certainement permis de parler de l'agrégat des termes d'une série convergente ; fait partie de cet agrégat chaque nombre qui figure comme terme dans la série ; il figure dans l'agrégat autant de fois que dans la série. Toute idée d'ordre a disparu. Ce n'est pas toutefois à ce point de vue que je veux me placer, mais bien à celui d'où l'on a considéré les suites. Une suite, a-t-on dit, est définie quand le terme qui se trouve à un rang n est défini, quel que soit le nombre naturel n ; cela revient à dire que pour définir une suite, il faut faire correspondre à chaque numéro 1, 2, 3, ..., (à chaque élément de l'ensemble des nombres naturels), un nombre déterminé, le terme de la suite dont le rang est précisément ce numéro. La généralisation est immédiate. Au lieu de l'ensemble des nombres naturels, concevons un ensemble quelconque (E) d'éléments distincts et imaginons qu'à chaque élément de cet ensemble on fasse correspondre un nombre : Si l'on veut réunir tous ces nombres par la pensée, on pourra encore donner le nom d'agrégat à leur réunion : un élément de l'agrégat ne sera dé-

fini que si l'on dit quelle est sa valeur et à quel élément de l'ensemble (E) il correspond. L'idée d'ordre est remplacée par l'idée de correspondance avec un ensemble quelconque [1]. L'agrégat de nombres auquel on parvient ainsi peut contenir une infinité de termes identiques : chacun de ces termes se distingue des autres par l'élément de (E) auquel il correspond, élément que l'on peut, si l'on veut, regarder comme un indice qui affecte le terme de l'agrégat qui lui correspond.

Dans les applications de cette idée qui vont suivre, applications qui concernent les séries, je supposerai toujours que l'ensemble (E), dont je désignerai par ϱ un élément quelconque, est *dénombrable*. A part cela, l'ensemble (E) peut être quelconque : ce peut être l'ensemble des nombres naturels, ou l'ensemble des nombres entiers, ou l'ensemble des nombres pairs, ou l'ensemble des systèmes de deux nombres entiers, ou l'ensemble des systèmes de p nombres naturels, etc... ; à chaque élément ϱ de (E) correspond un nombre ou terme que je désigne par v_ϱ. Puisque (E) est dénombrable, on peut imaginer une correspondance parfaite entre cet ensemble et l'ensemble des nombres naturels ; en supposant que l'élément ϱ de (E) et le nombre naturel n se correspondent, je désignerai par u_n le même nombre que v_ϱ : On peut dire alors que les termes v_ϱ sont rangés dans l'ordre u_1, u_2, u_3, ... Si l'on adopte un autre mode de correspondance entre les éléments ϱ de (E) et les nombres naturels, on range par là-même les termes v_ϱ dans une autre suite U_1, U_2, U_3, ..., qui peut se déduire de la suite u_1, u_2, u_3, ..., en intervertissant les termes (n° **74**), puisque si l'on désigne par n et $\varphi(n)$ les nombres naturels qui correspondent au même élément ϱ de (E) dans l'un et l'autre mode de correspondance, la suite $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(3)$, ..., ne diffère de la suite 1, 2, 3, . ., que par l'ordre des termes et que l'on a

$$U_{\varphi(n)} = u_n = v_\varrho.$$

Si la série $u_1 + u_2 + \dots$ est absolument convergente, sa somme, qui ne dépend point de l'ordre de ses termes, est égale à la somme de la série $U_1 + U_2 + \dots$, ou de toute autre série formée de la

(1) C'est cette même idée de correspondance qui, comme on le verra au chapitre IV, est le fond de l'idée de fonction.

même façon, et il est naturel de regarder cette somme comme étant la valeur du symbole

$$\sum_{\rho} v_{\rho},$$

auquel je conserverai le nom de série (absolument convergente) : on dit de ce symbole que la sommation y est étendue à tous les termes v_{ρ} qui correspondent aux divers éléments ρ de (E), parce que l'on se représente grossièrement sa valeur comme étant la somme de tous ces termes ; on dit aussi, par ellipse, que la sommation est étendue à tous les éléments ρ de (E), en entendant qu'on fait la somme, non de ces éléments, mais des nombres v_{ρ} qui leur correspondent. Je dirai de cette série, et de sa somme, qu'elles sont *attachées* à l'ensemble (E). Si la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n$, formée comme on l'a expliqué au moyen des nombres v_{ρ}, n'était pas absolument convergente, il n'y aurait pas lieu d'attribuer au symbole $\sum_{\rho} v_{\rho}$ une signification indépendante de la correspondance établie entre les éléments de (E) et les nombres naturels.

103. — Dire que la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n$ est absolument convergente, c'est dire, en désignant par u'_n, v'_{ρ}, les valeurs absolues de u_n, v_{ρ} que la série à termes positifs ou nuls $\sum_{n=1}^{n=\infty} u'_n$ est convergente ou encore que si l'on considère l'ensemble (S′) dont chaque élément est la somme d'autant de termes qu'on voudra pris dans la suite u'_1, u'_2, ... u'_n, ... ou, ce qui est la même chose, la somme d'autant de termes qu'on voudra pris (chacun une fois) parmi les nombres v'_{ρ} qui correspondent aux éléments de (E), cet ensemble est borné en haut. La borne supérieure de cet ensemble (S′) est la somme de la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} u'_n$ ou si l'on veut, la valeur de la série $\sum_{\rho} v'_{\rho}$, attachée à l'ensemble (E) (n° **95**) ; il apparaît clairement

que cette valeur ne dépend pas de l'ordre des termes de la série, de la correspondance entre les éléments ρ de l'ensemble (E) et les nombres naturels.

Si aux éléments ρ de l'ensemble (E) correspondent des nombres positifs ou nuls a_ρ, si la série $\sum\limits_\rho a_\rho$ est convergente, et si l'on a, quel que soit l'élément ρ, $v'_\rho \leqq a_\rho$, la série $\sum\limits_\rho v_\rho$, attachée à (E), est absolument convergente, et la valeur absolue de sa somme ne peut dépasser $\sum\limits_\rho a_\rho$ (n° **100**).

104. — Supposons toujours que la série $\sum\limits_\rho v_\rho$, attachée à (E), soit absolument convergente, et soit V sa somme. On suppose, comme plus haut, qu'il y ait une correspondance parfaite entre les éléments ρ de (E) et les nombres naturels n, ou, si l'on veut, qu'on ait assigné un rang n à chaque élément ρ de (E), et l'on désigne par u_n le nombre v_ρ qui correspond au n^e élément ρ de (E) ; V n'est autre chose que la somme de la série $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} u_n$.

Soit (E_α) un ensemble contenu dans E ; il est forcément fini ou dénombrable. Le symbole $\sum\limits_\rho v_\rho$, où la sommation est étendue, non plus aux nombres v_ρ qui correspondent aux éléments de (E) mais seulement à ceux de ces nombres qui correspondent aux éléments de (E_α) représente encore (n° **100**) une série absolument convergente, attachée, ainsi que sa somme w_α, à l'ensemble (E_α). Puisque (E_α) est dénombrable, on peut en faire correspondre les éléments aux nombres naturels 1, 2, ..., ou, si l'on veut, les ranger dans un certain ordre. Si l'on désigne par $u_{\alpha \cdot m}$ le même nombre que v_ρ lorsque ρ est le m^e élément de (E_α), on aura évidemment

$$w_\alpha = u_{\alpha,1} + u_{\alpha,2} + \ldots + u_{\alpha.m} + \ldots$$

Ceci posé, imaginons qu'on décompose l'ensemble (E) en un nombre fini r d'ensembles partiels (E_1), (E_2), ..., (E_r) sans élément commun, en sorte que tout élément de (E) figure dans l'un de ces

ensembles partiels et dans un seul, que tout élément qui figure dans un de ces ensembles partiels figure aussi dans (E); on peut dire encore que l'un quelconque des ensembles partiels est formé des éléments de (E) qui ne figurent pas dans les autres.

Le symbole (E_α) représente l'un quelconque des ensembles partiels (E_1), (E_2), ... (E_r), en supposant que α prenne les valeurs 1, 2, ..., r. En conservant les notations précédemment expliquées, c'est-à-dire en désignant par w_α la somme de la série $\sum\limits_\rho v_\rho$ attachée à l'ensemble (E_α), on a

$$V = w_1 + w_2 + \ldots + w_r. \tag{1}$$

Cette proposition ne diffère pas au fond, de celle du n° **93** qui se rapporte à la somme de plusieurs séries; on aura, en effet, pour les valeurs 1, 2, ..., r de α

$$w_\alpha = u_{\alpha,1} + u_{\alpha,2} + \ldots + u_{\alpha,m} + \ldots,$$

et par conséquent (n° **93**)

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + \ldots + w_r = (&u_{1,1} + u_{2,1} + \ldots + u_{r,1}) \\ &+ (u_{1,2} + u_{2,2} + \ldots + u_{r,2}) + \ldots \\ &+ (u_{1,m} + u_{2,m} + \ldots + u_{r,m}) + \ldots; \end{aligned} \tag{2}$$

mais la série qui figure dans le second membre, dont le m^e terme est $(u_{1,m} + u_{2,m} + \ldots u_{r,m})$ reste convergente quand on supprime les parenthèses et qu'on y regarde $u_{\alpha,\beta}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots r$; $\beta = 1, 2, \ldots$.) comme y occupant le rang $(\beta - 1)r + \alpha$; cette série, après la suppression des parenthèses, n'est autre en effet que la série $\sum\limits_\rho v_\rho$ ou $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} u_n$ attachée à (E), dans laquelle on a rangé les termes dans un certain ordre; le terme de rang $(\beta - 1)r + \alpha$ occupait dans $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} u_n$ le rang qu'occupe dans (E) l'élément ρ qui se trouve être le β^e du α^e ensemble partiel (E_α). La série $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} u_n$ étant absolument convergente, il en est de même de celle qu'on en déduit par

l'interversion des termes et, en particulier, de celle qui figure dans le second membre de l'égalité (2) quand on a supprimé les parenthèses ; dans ces conditions, la suppression des parenthèses est légitime (nº **90**) ; le second membre de l'égalité (1) est égal à $\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n$ ou à V et l'égalité (1) est bien démontrée.

Observons en passant qu'on retomberait sur la proposition du nº **98** si l'on prenait $r = 2$ et si l'on constituait l'ensemble (E_1) avec les éléments ρ de (E) auxquels correspondent des termes v_ρ positifs, l'ensemble (E_2) avec les éléments ρ de (E) auxquels correspondent des termes négatifs ou nuls.

105. — Mon but est maintenant d'arriver à la proposition suivante.

Supposons qu'on décompose l'ensemble (E) en une infinité dénombrable d'ensembles partiels sans éléments communs (E_1), (E_2), ..., (E_n), ... : il faut entendre par là que si l'on considère un élément quelconque ρ de (E), cet élément figurera dans un des ensembles partiels (E_1), (E_2), ..., (E_n),... et dans un seul, et que, d'autre part, tout élément figurant dans un ensemble partiel figure dans (E) ; la série

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n + \dots$$

où w_α désigne toujours la somme de la série $\sum_\rho v_\rho$ attachée à l'ensemble (E_α) est convergente et a pour somme V.

Il est bien aisé de se rendre compte de ce qu'il reste à démontrer pour établir cette proposition ; soit $(\mathcal{E}_n)$ l'ensemble des éléments de (E) qui ne figurent ni dans (E_1), ni dans (E_2), ..., ni dans (E_n) et soit W_n la somme de la série $\sum_\rho v_\rho$ attachée à l'ensemble $(\mathcal{E}_n)$; on aura par le théorème précédent

$$V = w_1 + w_2 + \dots + w_n + W_n ;$$

il reste à démontrer que n grandissant indéfiniment, W_n tend vers 0.

Cela, comme on va le voir, résultera de l'étude du cas où tous

les nombres v_ρ sont positifs ou nuls : du même coup, on aura prouvé que la série $w_1 + w_2 + \ldots$ est absolument convergente.

106. — Au lieu de raisonner sur le cas où les nombres v_ρ sont positifs ou nuls, je conserverai aux symboles v_ρ leur signification, en supposant toujours que la série $\sum\limits_\rho v_\rho$ attachée à l'ensemble total (E) soit absolument convergente, et je raisonnerai sur les valeurs absolues v'_ρ des nombres v_ρ : la série $\sum\limits_\rho v'_\rho$, attachée au même ensemble (E), est convergente ; soit V′ sa somme. Soient de même w'_α la somme de la série partielle $\sum\limits_\rho v'_\rho$ attachée à l'ensemble (E_α), et W'_n la somme de la série partielle $\sum\limits_\rho v'_\rho$ attachée à l'ensemble $(\mathcal{E}_n)$, on aura comme précédemment, par le théorème du n° **104**

$$V' = w'_1 + w'_2 + \ldots + w'_n + W'_n,$$

d'où il résulte déjà que la série $w'_1 + w'_2 + \ldots + w'_n + \ldots$, dont les termes sont positifs ou nuls est convergente et que sa somme est au plus égale à V′. Il reste à prouver que l'on a $\lim\limits_{n=\infty} W'_n = 0$.

V′ est la borne supérieure de l'ensemble (S′) dont les éléments sont les diverses sommes que l'on obtient en ajoutant des nombres v'_ρ qui correspondent à des éléments différents ρ de l'ensemble (E).

Quelque petit que soit le nombre positif ε, il y a dans (S′) un élément A qui est plus grand que $V' - \varepsilon$: A est la somme d'un nombre fini de termes v'_ρ correspondant à différents éléments ρ de (E), lesquels figurent dans certains des ensembles partiels (E_1), (E_2), ...

Soit m le plus grand des indices de ceux des ensembles (E_1), (E_2), ... qui contiennent quelqu'un des éléments ρ de (E) auxquels correspond un de ces termes v'_ρ dont la somme forme A : chacun de ces termes figurera dans quelqu'une des séries $\sum\limits_\rho v'_\rho$ attachées aux ensembles (E_1), (E_2), ..., (E_m), séries dont les sommes respec-

tives sont $w'_1, w'_2, \ldots, w'_m$: on aura donc

$$A \leqq w'_1 + w'_2 + \ldots + w'_m$$

et, *a fortiori*, pour $n \geqq m$,

$$A \leqq w'_1 + w'_2 + \ldots + w'_n$$

et, par conséquent

$$V' - \varepsilon < A \leqq V' - W'_n, \qquad W'_n < \varepsilon$$

sous la seule condition $n > m$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Maintenant, en reprenant les notations relatives au cas général (nº **105**), il est clair que l'on a

$$|w_1| \leqq w'_1, \; |w_2| \leqq w'_2, \ldots, \; |w_n| \leqq w'_n, \; |W_n| \leqq W'_n$$

et il est bien prouvé que la série

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots$$

est absolument convergente et a pour somme V.

107. — La série $w_1 + w_2 + \ldots$ étant absolument convergente, on peut sans changer la somme, intervertir comme on veut l'ordre de ses termes ; cette simple remarque permet de généraliser encore un peu la forme du théorème qui vient d'être démontré, ce qui sera commode pour les applications. Reprenons l'ensemble dénombrable (E) auquel est attachée la série absolument convergente $\sum_\rho v_\rho$; on l'a décomposé en une infinité dénombrable d'ensembles partiels, dont on a représenté l'un quelconque par (E_α), l'indice α pouvant prendre toutes les valeurs 1, 2, ... qui constituent l'ensemble des nombres naturels. Cette dernière supposition a été introduite pour la commodité de la démonstration, mais n'a rien d'essentiel. On peut tout aussi bien imaginer que α représente un élément quelconque d'un ensemble dénombrable (A) d'objets distincts, en regardant toujours w_α comme la somme de la série absolument convergente $\sum_\rho v_\rho$ attachée à l'ensemble (E_α). De cette façon, à chaque élément α de l'ensemble (A) correspond un nombre déterminé w_α, et il sera permis de parler de la série absolument convergente

$\sum_{\alpha} w_{\alpha}$ attachée à l'ensemble (A), série qui ne différera que par l'ordre des termes de la série $w_1 + w_2 + \ldots$ sur laquelle ont roulé les raisonnements antérieurs. — On est ainsi amené à la forme générale que voici de la proposition qui a fait l'objet des numéros précédents.

Soit (E) un ensemble dénombrable d'objets distintcs ρ, auquel est attachée une série absolument convergente $\sum_{\rho} v_{\rho}$; soit (A) un autre ensemble dénombrable d'objets distincts α ; supposons que l'ensemble (E) soit décomposé en une infinité dénombrable d'ensembles partiels (E_α), sans élément commun, dont chacun corresponde à un élément α de l'ensemble (A) : on entend par là que chaque élément de (E) figure dans l'un des ensembles partiels (E_α) et dans un seul, et que tout élément de l'un quelconque (E_α) des ensembles partiels figure dans l'ensemble (E). A chacun de ces ensembles (E_α) est attachée une série absolument convergente $\sum_{\rho} v_{\rho}$, où il est entendu que la sommation est étendue à tous les éléments de l'ensemble (E_α) ; soit w_α la somme de cette série ; à chaque élément α de l'ensemble (A) correspond un nombre w_α ; la série $\sum_{\alpha} w_{\alpha}$ attachée ainsi à l'ensemble (A), où la sommation est étendue à tous les éléments de (A), est absolument convergente et sa somme est égale à la somme de la série $\sum_{\rho} v_{\rho}$ attachée à l'ensemble (E).

Dans le cas où tous les termes v_ρ de la série $\sum_{\rho} v_{\rho}$ attachée à (E) sont positifs ou nuls, lors même qu'on ne sait rien sur la convergence de la série attachée à (E), si l'on reconnait sur chaque série attachée à un ensemble partiel (E_α) qu'elle est convergente, sa somme w_α est alors un nombre positif ou nul ; si l'on reconnait enfin que la série $\sum_{\alpha} w_{\alpha}$, attachée à l'ensemble (A) est convergente, on peut affirmer la convergence de la série $\sum_{\rho} v_{\rho}$ attachée à (E) ; en effet si l'on prend autant de termes que l'on veut dans cette dernière série, chacun de ces termes figure dans quelqu'une des séries

ayant pour somme l'un des nombres w_α, et la somme de ses termes ne dépasse ni la somme de ces nombres w_α, ni, *a fortiori* la somme $\sum_\alpha w_\alpha$. L'ensemble dont les éléments sont des sommes de termes pris dans la série attachée à l'ensemble (E) est donc borné en haut. Cette série est convergente et sa somme est égale à la somme de la série $\sum_\alpha w_\alpha$.

Mais, si les nombres v_ρ n'étaient pas tous de même signe, on ne pourrait conclure la convergence absolue de la série $\sum_\rho v_\rho$ attachée à l'ensemble (E) ni de la convergence absolue des séries partielles attachées aux ensembles (E_α), ni de la convergence absolue de la série $\sum_\alpha w_\alpha$ attachée à l'ensemble (A).

Dans ce cas on se reportera à la série $\sum_\rho v'_\rho$ formée par les valeurs absolues des termes de la série $\sum_\rho v_\rho$. Si l'on parvient, par un procédé quelconque à démontrer la convergence de la série $\sum_\rho v'_\rho$ attachée à (E), par exemple en constatant d'abord la convergence des séries $\sum_\rho v'_\rho$ attachées aux ensembles partiels (E_α), puis la convergence de la série $\sum_\alpha w'_\alpha$ attachée à (A), dont les termes sont respectivement les sommes des séries précédentes, on sera bien certain que la série $\sum_\rho v_\rho$ attachée à (E) est absolument convergente. Cette remarque sera appliquée dans les n^{os} **111** et **112**.

108. — Supposons, comme premier exemple, que l'ensemble (E) soit l'ensemble des nombres entiers (négatifs, nuls ou positifs). Le signe ρ désignera alors un quelconque de ces nombres entiers, v_ρ est, par hypothèse, déterminé pour chaque valeur entière de ρ : on peut établir la correspondance entre chaque nombre ρ et chaque nombre naturel n comme on l'a expliqué au n° **70**, en supposant les nombres ρ rangés dans la suite 0, 1, — 1, 2, — 2, ... et en

faisant correspondre à chaque nombre ρ le rang n qu'il occupe dans cette suite ; la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n$ peut alors s'écrire

$$v_0 + v_{-1} + v_1 + v_2 + v_{-2} + \dots ;$$

Si on la suppose absolument convergente, elle est, d'après le théorème précédent, ou tout simplement en vertu des nos **93** et **90**, la somme des deux séries

$$v_0 + v_{-1} + v_{-2} + \dots = \sum_{\rho=0}^{\rho=-\infty} v_\rho$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots = \sum_{\rho=1}^{\rho=\infty} v_\rho$$

qui sont elles-mêmes absolument convergentes. Cette somme se représente par le symbole

$$\sum_{\rho=-\infty}^{\rho=+\infty} v_\rho.$$

Il importe de remarquer que ce symbole s'emploie lors même que la série

$$v_0 + v_1 + v_{-1} + v_2 + v_{-2} + \dots$$

n'est pas absolument convergente. Toutes les fois que les deux séries partielles $\sum_{\rho=0}^{\rho=-\infty} v_\rho$, $\sum_{\rho=1}^{\rho=\infty} v_\rho$ sont convergentes, même sans l'être absolument, mais seulement lorsque ces deux séries sont convergentes, on emploiera le symbole

$$\sum_{\rho=-\infty}^{\rho=+\infty} v_\rho$$

pour représenter la somme de leurs sommes. Le terme auquel on fait commencer les deux séries partielles n'a d'ailleurs pas d'impor-

tance : si les deux séries écrites sont convergentes il en est de même, par exemple, des deux séries

$$v_p + v_{p-1} + v_{p-2} + \dots + v_0 + v_{-1} + v_{-2} + \dots,$$
$$v_{p+1} + v_{p+2} + v_{p+3} + \dots,$$

dont les sommes respectives peuvent s'écrire

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=-\infty} v_\rho + \sum_{=1}^{\rho=p} v_\rho, \qquad \sum_{\rho=1}^{\rho=+\infty} v_\rho - \sum_{\rho=1}^{\rho=p} v_\rho ;$$

la somme de leurs sommes est encore

$$\sum_{\rho=0}^{\rho=+\infty} v_\rho + \sum_{\rho=1}^{\rho=+\infty} v_\rho = \sum_{\rho=-\infty}^{\rho=+\infty} v_\rho .$$

Toujours sous la supposition de la convergence des deux séries partielles, il est clair que la somme

$$\sum_{\rho=-\infty}^{\rho=+\infty} v_\rho$$

peut être regardée comme la limite pour p infini de la somme de $2p + 1$ termes,

$$\sum_{\rho=-p}^{\rho=+p} v_\rho = v_{-p} + v_{-p+1} + \dots + v_{-1} + v_0 + v_1 + \dots + v_p ;$$

mais cette limite pourrait très bien exister sans que les deux séries partielles fussent convergentes ; c'est ce qui arriverait, par exemple, si, quel que fût le nombre naturel p, on avait $v_{-p} = - v_p$: la somme précédente serait toujours égale à v_0 ; elle aurait v_0 pour limite, et cependant, la série $v_1 + v_2 + v_3 + \dots$ pourrait très bien être divergente. Si, au contraire les deux séries partielles sont convergentes, il est clair que, en désignant par p, q deux nombres naturels quelconques, la somme

$$\sum_{\rho=-q}^{\rho=p} v_\rho$$

tend vers

$$\sum_{\rho=-\infty}^{\rho=+\infty} v_\rho$$

pourvu que p et q grandissent indéfiniment.

109. — Comme second exemple, je vais considérer le cas où l'ensemble (E) est soit l'ensemble des systèmes (α, β) de deux nombres entiers α, β, soit une partie de cet ensemble, d'où l'on aurait exclu certains systèmes (α, β) en nombre fini ou infini. Le signe ρ, qui désigne un élément quelconque de l'ensemble (E) peut alors être remplacé par le système (α, β) : On suppose toujours établie une correspondance parfaite entre l'ensemble (E) et l'ensemble des nombres naturels n ; à chaque élément (α, β) de (E) est attaché un nombre $v_{\alpha,\beta}$, et l'on suppose encore $u_n = v_{\alpha,\beta}$ toutes les fois que l'élément (α, β) de (E) et le nombre naturel n se correspondent ; enfin on suppose absolument convergente la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n$ ou $\sum_\rho v_\rho$, que l'on représente aussi par le symbole

$$\sum_{\alpha,\beta} v_{\alpha,\beta}.$$

On peut s'aider de la représentation géométrique expliquée au n° **75** ; qu'on se représente le plan décomposé en carrés au moyen de deux systèmes de droites parallèles ; les droites d'un système étant perpendiculaires aux droites de l'autre ; chaque file horizontale est numérotée au moyen d'un nombre entier α (positif, nul, ou négatif) ; chaque file verticale au moyen d'un nombre entier β ; chaque carré porte ainsi deux numéros α, β.

On imaginera que chaque nombre $v_{\alpha,\beta}$ est inscrit dans la case qui porte les deux numéros α, β. Si l'ensemble (E) ne contient pas tous les systèmes α, β, certaines cases resteront vides ; des files entières, soit horizontales soit verticales peuvent rester vides : la file horizontale, numérotée α_0 serait vide si tous les systèmes (α, β) dont le premier nombre est α_0 devaient être exclus. Un cas fréquent est celui où l'ensemble (E) ne contient que les systèmes (α, β) formés de deux nombres naturels ; alors on peut, au lieu du tableau à

double entrée, à extension indéfinie dans tous les sens, se figurer un tableau à double entrée limité en bas et à gauche, s'étendant indéfiniment vers le haut et vers la droite : tout cela a été expliqué au n° **75**. Enfin on peut supposer que les cases pleines soient numérotées au moyen d'un seul numéro et employer pour cela les nombres naturels 1, 2, ... : ce double mode de numérotage permet de réaliser la correspondance parfaite entre l'ensemble (E) et l'ensemble des nombres naturels.

Tout ceci rappelé, considérons une valeur particulière de α et désignons par (E_α) l'ensemble des systèmes (α, β) où le premier indice a cette valeur particulière [1] ; l'ensemble (E_α) est contenu dans (E). L'ensemble (E) peut être ainsi regardé comme étant décomposé en une infinité dénombrable d'ensembles partiels (E_α), que l'on obtient en donnant à l'indice α toutes les valeurs entières possibles, ou au moins toutes celles qui ne servent pas à numéroter une file horizontale entièrement vide. Les nombres $v_{\alpha,\beta}$ qui sont contenus dans la file horizontale numérotée α, sont tous affectés du même premier indice α, ils se distinguent par le second indice β, dont les valeurs diverses forment un ensemble fini ou dénombrable. (E_α) désigne l'ensemble des systèmes (α, β) où le premier indice a une valeur fixe α, tandis que le second indice prend toutes les valeurs possibles non exclues : L'ensemble dénombrable des ensembles partiels (E_α) reproduit évidemment l'ensemble primitif (E), qui est donc bien composé des ensembles (E_α) ; à chacun de ces ensembles (E_α) est attachée une série, dont les termes sont les nombres $v_{\alpha,\beta}$ placés dans les cases de la file horizontale qui porte le numéro α, série qui est absolument convergente, puisqu'elle ne contient qu'une partie des termes de la série absolument convergente $\sum_{\alpha,\beta} v_{\alpha,\beta}$; soit w_α la somme de la série attachée à l'ensemble (E_α). Le nombre w_α est ainsi attaché à l'indice α ; les valeurs non exclues de cet indice forment un ensemble dénombrable (A) auquel est attachée la série absolument convergente $\sum_\alpha w_\alpha$, dont la somme est égale à celle de la série $\sum_{\alpha,\beta} v_{\alpha,\beta}$ attachée à (E).

[1] Si tous ces systèmes devaient être exclus, l'ensemble (E_α) n'existerait pas.

On se représente les choses d'une façon commode, malgré son incorrection, en imaginant que pour faire la somme de tous les nombres $v_{\alpha,\beta}$ du tableau à double entrée, on a fait d'abord la somme w_α de tous les termes contenus dans une même file horizontale, puis la somme de toutes les sommes partielles w_α.

Il est clair qu'on aurait pu tout aussi bien faire les sommes des termes contenus dans chaque file verticale, puis la somme de toutes les sommes partielles ; on aurait obtenu le même résultat, la somme de la série absolument convergente $\sum\limits_{\alpha,\beta} v_{\alpha,\beta}$.

Plaçons-nous dans le cas où aucun des systèmes (α, β) n'est exclu, où les lettres α, β doivent prendre séparément toutes les valeurs entières, et où, ainsi, aucune case du tableau à double entrée n'est vide : on peut toujours, d'ailleurs, se mettre dans ce cas, quitte à mettre des zéros dans les cases vides.

On pourra alors écrire, en adoptant les notations expliquées dans le n° **108**.

$$w_\alpha = \sum_{\beta=-\infty}^{\beta=+\infty} v_{\alpha,\beta}, \quad \sum_{\alpha,\beta} v_{\alpha,\beta} = \sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} w_\alpha = \sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty}\left(\sum_{\beta=-\infty}^{\beta=+\infty} v_{\alpha,\beta}\right),$$

le dernier membre a, par définition, la même signification que $\sum\limits_{\alpha=+\infty}^{\alpha=-\infty} w_\alpha$. En supposant toujours que la série proposée est absolument convergente, on peut écrire, d'après les explications qui précèdent

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty}\left(\sum_{\beta=-\infty}^{\beta=+\infty} v_{\alpha,\beta}\right) = \sum_{\beta=-\infty}^{\beta=+\infty}\left(\sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} v_{\alpha,\beta}\right) = \sum_{\alpha,\beta} v_{\alpha,\beta}.$$

Si l'ensemble (E) au lieu d'être formé de tous les systèmes (α, β) où α, β sont deux nombres entiers, était formé de tous les systèmes (α, β) où α, β sont deux nombres naturels, et si la série attachée à (E) était toujours absolument convergente, on écrirait de même

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty}\left(\sum_{\beta=1}^{\beta=\infty} v_{\alpha,\beta}\right) = \sum_{\beta=1}^{\beta=\infty}\left(\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} v_{\alpha,\beta}\right) = \sum_{\alpha,\beta} v_{\alpha,\beta}.$$

Supposons que l'ensemble (E) soit l'ensemble des systèmes (α, β, γ) de trois nombres naturels, positifs, nuls ou négatifs. A chacun de ces systèmes correspond un terme $v_{\alpha,\beta,\gamma}$ et l'on suppose toujours que la série

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma} v_{\alpha,\beta,\gamma}$$

étendue à tous les éléments de cet ensemble soit absolument convergente. On peut prendre pour ensemble partiel (E_α) l'ensemble des systèmes (α, β, γ) pour lesquels α a une valeur fixe ; si l'on désigne alors par w_α la somme de la série

$$\sum_{\beta,\gamma} v_{\alpha,\beta,\gamma},$$

la somme de la série proposée sera encore $\sum\limits_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} w_\alpha$ ou, si l'on veut,

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty}\left[\sum_{\beta=-\infty}^{\beta=+\infty}\left(\sum_{\gamma=-\infty}^{\gamma=+\infty} v_{\alpha,\beta,\gamma}\right)\right];$$

on peut continuer ainsi.

Au lieu d'écrire, avec le sens qui vient d'être expliqué,

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty}\left(\sum_{\beta=-\infty}^{\beta=+\infty} v_{\alpha,\beta}\right), \quad \sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty}\left[\sum_{\beta=-\infty}^{\beta=+\infty}\left(\sum_{\gamma=-\infty}^{\gamma=+\infty} v_{\alpha,\beta,\gamma}\right)\right],$$

on écrit plus simplement, et avec le même sens,

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty}\ \sum_{\beta=-\infty}^{\beta=+\infty} v_{\alpha,\beta}, \quad \sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty}\ \sum_{\beta=-\infty}^{\beta=+\infty}\ \sum_{\gamma=-\infty}^{\gamma=+\infty} v_{\alpha,\beta,\gamma}.$$

110. — Il convient de remarquer que l'emploi de ces symboles est légitime lors même qu'on n'a plus affaire à des séries absolument convergentes, sous des conditions que je me contenterai d'énoncer pour le premier de ces symboles, celui qui comporte deux signes $\sum$.

1° On suppose que la série

$$\sum_{\beta=-\infty}^{\beta=+\infty} v_{\alpha,\beta}$$

est convergente quel que soit α, c'est-à-dire (n° **108**), que les deux séries

$$v_{\alpha,1} + v_{\alpha,2} + v_{\alpha,3} + \ldots,$$
$$v_{\alpha,0} + v_{\alpha,-1} + v_{\alpha,-2} + \ldots$$

sont convergentes.

2° En désignant par w_α la somme de la série $\sum\limits_{\beta=-\infty}^{\beta=+\infty} v_{\alpha,\beta}$, on suppose que la série

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} w_\alpha$$

est convergente : la somme de cette série est la valeur de la *somme double*

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} \sum_{\beta=-\infty}^{\beta=+\infty} v_{\alpha,\beta}.$$

Mais lorsqu'on n'a pas affaire à des séries absolument convergentes, l'égalité

$$\sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} \sum_{\beta=-\infty}^{\beta=+\infty} v_{\alpha,\beta} = \sum_{\beta=-\infty}^{\beta=+\infty} \sum_{\alpha=-\infty}^{\alpha=+\infty} v_{\alpha,\beta}$$

où le second membre doit être défini comme on a fait le premier, n'est pas toujours vraie ; il peut même arriver que le second membre n'ait plus de signification ; on ne peut plus affirmer non plus que l'un ou l'autre membre soit égal à la somme $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} u_n$ de la série dont les termes sont les nombres $v_{\alpha,\beta}$, rangés dans une suite linéaire, et cette dernière série peut n'être pas convergente.

On donne souvent le nom de séries à double, triple, ... entrée,

de sommes doubles, triples, ... à des expressions telles que celles que l'on vient de considérer.

111. — Considérons la série $\sum_{\alpha,\beta} x^{\alpha+\beta}$, où l'on suppose que les systèmes (α, β) sont formés de deux entiers positifs ou nuls, d'ailleurs quelconques. Cette série est absolument convergente quand on a $|x| < 1$, ainsi qu'il résultera du calcul même qui fournit sa somme, en regardant x comme positif. On a

$$\sum_{\beta=0}^{\beta=\infty} x^{\alpha+\beta} = x^{\alpha} \sum_{\beta=0}^{\beta=\infty} x^{\beta} = \frac{x^{\alpha}}{1-x},$$

$$\sum_{\alpha,\beta} x^{\alpha+\beta} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \frac{x^{\alpha}}{1-x} = \frac{1}{1-x} \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} x^{\alpha} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

En rangeant les termes de la série dans le tableau

$$\begin{array}{r} 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \\ + x + x^2 + x^3 + \ldots \\ + x^2 + x^3 + \ldots \\ + x^3 + \ldots \end{array}$$

et en faisant les sommations par lignes verticales on trouve la série

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$$

qui, ainsi, est absolument convergente, sous la supposition $|x| < 1$, et qui a pour somme $\frac{1}{(1-x)^2}$.

On peut observer que l'ordre adopté dans le tableau, revient à faire correspondre à l'ensemble des systèmes de deux nombres entiers positifs ou nuls (α, β) l'ensemble des systèmes de deux nombres positifs ou nuls (p, q), pour lesquels on a $p \leqq q$, par les conditions $p = \alpha$, $q = \alpha + \beta$ ou $\alpha = p$, $\beta = q - p$, on a alors

$$\sum_{\alpha,\beta} x^{\alpha+\beta} = \sum_{p,q} x^q = \sum_{q=0}^{q=\infty} \sum_{p=0}^{p=q} x^q = \sum_{q=0}^{q=\infty} (q+1)\, x^q.$$

On arrive au même résultat en transformant la série à double entrée dans une série simple, d'après cette convention que le terme $x^{\alpha+\beta}$ précédera le terme $x^{\alpha'+\beta'}$ si l'on a $\alpha+\beta > \alpha'+\beta'$, et en groupant ensemble les $n+1$ termes égaux pour lesquels $\alpha+\beta$ a la valeur n.

112. — Considérons la série $\sum\limits_{\alpha,\beta} x^{\alpha\beta}$ où les systèmes (α, β) sont formés de deux nombres naturels : cette série est encore absolument convergente quand on suppose $|x| < 1$, ainsi qu'il résultera du calcul suivant en supposant x positif. On a

$$\sum_{\alpha,\beta} x^{\alpha\beta} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty}\left(\sum_{\beta=1}^{\beta=\infty} x^{\alpha\beta}\right) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \frac{x^{\alpha}}{1-x^{\alpha}}.$$

Si l'on groupe ensemble les termes égaux pour lesquels $\alpha\beta$ est égal à un nombre naturel n, on voit de suite que le nombre de ces termes est le nombre δ_n de diviseurs de n, en sorte que l'on a

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \frac{x^{\alpha}}{1-x^{\alpha}} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \delta_n x^n.$$

d'après la démonstration même, on est assuré que la série qui figure dans le second membre est convergente, sous la condition $|x| < 1$. δ_1 doit être pris égal à 1 ; si n est un nombre premier, δ_n est égal à 2.

Considérons encore la série $\sum\limits_{\alpha,\beta} (-1)^{\beta-1} x^{\alpha(2\beta-1)}$, où les systèmes (α, β) sont formés de deux nombres naturels : elle est absolument convergente sous la supposition $|x| < 1$, puisque si l'on réduit les termes à leurs valeurs absolues, elle ne comportera qu'une partie des termes de la série précédente. On a

$$\sum_{\alpha,\beta} (-1)^{\beta-1} x^{\alpha(2\beta-1)} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty}\left[\sum_{\beta=1}^{\beta=\infty} (-1)^{\beta-1} x^{\alpha(2\beta-1)}\right] = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \frac{x^{\alpha}}{1+x^{2\alpha}}$$

$$= \sum_{\beta=1}^{\beta=\infty} (-1)^{\beta-1}\left[\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} x^{\alpha(2\beta-1)}\right] = \sum_{\beta=1}^{\beta=\infty} \frac{(-1)^{\beta-1} x^{2\beta-1}}{1-x^{2\beta-1}}$$

L'identité

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \frac{x^{\alpha}}{1+x^{2\alpha}} = \sum_{\beta=1}^{\beta=\infty} \frac{(-1)^{\beta-1} x^{2\beta-1}}{1-x^{2\beta-1}}$$

est celle que j'avais en vue. Ici encore, il serait naturel de grouper ensemble les termes pour lesquels $\alpha(2\beta-1)$ est égal à n ; le coefficient γ_n de x^n dans la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} \gamma_n x^n$ que l'on obtient ainsi apparaît comme l'excès du nombre de diviseurs impairs de n qui sont de la forme $4p+1$ sur le nombre de ces diviseurs qui sont de la forme $4p-1$. En particulier si n est un nombre premier de la forme $4p-1$, dont les deux seuls diviseurs impairs sont 1 et $4p-1$, γ_n est nul ; si n est un nombre premier de la forme $4p+1$, γ_n est égal à 2. On démontre que γ_n représente en général le nombre de systèmes distincts d'entiers positifs ou nuls (u, v) qui vérifient l'égalité $u^2+v^2=n$, ce nombre étant toutefois diminué d'une unité quand n est carré parfait. Cette propriété du coefficient γ_n, résulte très facilement d'une identité de la théorie des fonctions elliptiques ([1]). Mon seul but en l'énonçant est d'indiquer au lecteur l'un des points où la théorie des nombres et les théories analytiques se rencontrent.

113. — On peut ranger tous les nombres naturels autres que un, dans un tableau à double entrée, que le lecteur s'imaginera très facilement s'il veut bien se reporter à la façon dont on apprend en arithmétique, à former une table de nombres premiers. Dans chaque ligne horizontale, les nombres se suivront par ordre de grandeur croissante. La première ligne horizontale

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots$$

(1) Voir, par exemple, dans les *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques* de MM. Tannery et Molk (Paris, Gauthier-Villars) les formules CX_3, LXXI_3, XXXVI_1 et, même ouvrage, t. IV, p. 260.

contient tous les nombres pairs ; il n'y aura plus de nombres pairs dans les lignes suivantes. La seconde ligne

$$3, 9, 15, 21, \ldots$$

contient tous les nombres impairs divisibles par 3 ; de tels nombres ne figurent pas dans les lignes suivantes. La troisième

$$5, 25, 35, 55, \ldots$$

contient tous les nombres qui sont divisibles par 5 sans l'être par 2 ou par 3. La n^e ligne

$$p, p^2, \ldots$$

commence par le n^e nombre premier p (1) et contient tous les nombres naturels divisibles par p, qui ne sont pas divisibles par un nombre plus petit que p : en sorte que, si l'on divise par p les termes de cette n^e ligne, on obtiendra comme quotients tous les termes de la suite 1, 2, 3, 4, ..., qui ne figurent dans aucune des $n-1$ lignes précédentes.

Ceci posé, soit r un nombre positif plus grand que 1, affectons de l'exposant $-r$ tous les termes de la suite 2, 3, 4, ... ou, ce qui est la même chose, tous les éléments du tableau à double entrée précédemment défini ; Soit enfin

$$s = \frac{1}{1^r} + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \ldots ;$$

le second membre est, comme on sait, une série convergente et l'on a défini, dans ce qui précède, un mode particulier de transformation en série à double entrée de la série

$$s - 1 = \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{4^r} + \ldots.$$

Faisons les sommes des séries partielles répondant à chaque ligne horizontale du tableau, et désignons en général par s_p la somme des éléments de la ligne qui commence par le nombre premier p : soit encore p' le nombre premier immédiatement inférieur

(1) On ne considère pas 1 comme un nombre premier.

à p; la loi d'après laquelle on a formé le tableau fournit immédiatement les égalités suivantes.

$$s_2 = \frac{1}{2^r} s,$$

$$s_3 = \frac{1}{3^r}(s - s_2),$$

$$s_5 = \frac{1}{5^r}(s - s_2 - s_3),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$s_p = \frac{1}{p^r}(s - s_2 - s_3 - \ldots - s_{p'})$$

$$= \frac{1}{p^r}\left(1 - \frac{1}{2^r}\right)\left(1 - \frac{1}{3^r}\right)\left(1 - \frac{1}{5^r}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p'^r}\right).$$

Lorsque p augmente indéfiniment la somme $s_2 + s_3 + \ldots + s_p$ a pour limite la somme $s - 1$ de la série $\frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \frac{1}{4^r} + \ldots$; la quantité

$$s - s_2 - s_3 - s_5 - \ldots - s_{p'} = p^r s_p$$

a donc pour limite l'unité; par conséquent le produit infini

$$\left(1 - \frac{1}{2^r}\right)\left(1 - \frac{1}{3^r}\right)\left(1 - \frac{1}{5^r}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p^r}\right)\cdots,$$

où figure, dans les dénominateurs, la suite des nombres premiers, a pour valeur l'inverse de la série

$$\zeta(r) = \frac{1}{1^r} + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{3^r} + \ldots,$$

où figure, dans les dénominateurs, la suite des nombres naturels.

114. — Supposons que les deux séries

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n, \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n,$$

dont je désignerai les sommes respectives par A et B soient absolument convergentes, la série

$$\sum a_\alpha b_\beta \qquad \begin{matrix} \alpha = 1, 2, 3, \ldots, \\ \beta = 1, 2, 3, \ldots, \end{matrix}$$

est absolument convergente, comme il résulte immédiatement, dans le cas où les nombres a_α, b_β sont tous positifs ou nuls, des égalités

$$\sum a_\alpha b_\beta = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty}\left(a_\alpha \sum_{\beta=1}^{\beta=\infty} b_\beta\right) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \mathrm{B}a_\alpha = \mathrm{AB}.$$

Si maintenant on écrit la série $\sum_{\alpha\beta} a_\alpha b_\beta$ sous forme d'une série simple, en convenant de mettre le terme $a_\alpha b_\beta$ avant le terme $a_{\alpha'} b_{\beta'}$ si la somme $\alpha + \beta$ est plus petite que la somme $\alpha' + \beta'$ et en réunissant ensemble les termes pour lesquels $\alpha + \beta$ a la même valeur, on arrive à la conclusion suivante.

Si les deux séries

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n, \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n$$

sont absolument convergentes, il en est de même de la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} c_n,$$

où l'on suppose

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 b_1, \\ c_2 &= a_1 b_2 + a_2 b_1, \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ c_n &= a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1. \end{aligned}$$

et la somme de cette dernière série est le produit des sommes des deux séries proposées.

La première application qui a été faite des séries à double entrée, n° **111**, n'est évidemment qu'un cas particulier de la proposition qui vient d'être démontrée.

Il est bien clair d'ailleurs que l'on pourra adopter pour transformer la série $\sum a_\alpha b_\beta$ tel autre groupement de termes que l'on voudra.

Par exemple si on désigne par a, b deux nombres naturels, les deux séries

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} x^{a\alpha}, \qquad \sum_{\beta=0}^{\beta=\infty} x^{b\beta}$$

sont absolument convergentes si l'on suppose $|x| < 1$ et leurs sommes respectives sont

$$\frac{1}{1 - x^a}, \qquad \frac{1}{1 - x^b};$$

On aura donc

$$\frac{1}{(1 - x^a)(1 - x^b)} = \sum_{\alpha, \beta} x^{a\alpha + b\beta}, \qquad \begin{array}{l} \alpha = 0, 1, 2, \ldots, \\ \beta = 0, 1, 2, \ldots \end{array}$$

et l'on voit que le second membre est égal à

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n x^n$$

en désignant par A_n le nombre de systèmes distincts (α, β) formés de nombres entiers positifs ou nuls, tels que l'on ait

$$a\alpha + b\beta = n.$$

115. — La série

$$1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{a^n}{1 \cdot 2 \ldots n} + \ldots$$

dont on a établi au nº **95** qu'elle était absolument convergente, quel que fût le nombre a, fournit une application intéressante de la règle donnée plus haut pour former le produit de deux séries. Si on applique cette règle au produit de cette série par la série

$$1 + \frac{b}{1} + \frac{b^2}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{b^n}{1 \cdot 2 \ldots n} + \ldots$$

obtenue en remplaçant a par b, on trouve que le $(n + 1)^e$ terme du produit est égal à

$$\frac{a^n}{1 \cdot 2 \ldots n} + \frac{a^{n-1}}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} \cdot \frac{b}{1} + \frac{a^{n-2}}{1 \cdot 2 \ldots (n-2)} \cdot \frac{b^2}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{b^n}{1 \cdot 2 \ldots n}$$

ou à

$$\frac{(a + b)^n}{1 \cdot 2 \ldots n},$$

en sorte que le produit des sommes des deux séries s'obtient sous une forme pareille à chacune d'elles, à savoir

$$1 + \frac{a + b}{1} + \frac{(a + b)^2}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{(a + b)^n}{1 \cdot 2 \ldots n} + \ldots.$$

116. — Les exemples qui précèdent suffisent pour que l'on comprenne le rôle que les séries absolument convergentes jouent dans l'analyse, à cause de la façon dont on peut les manier et les transformer ; il en est tout autrement des séries qui sont convergentes sans l'être absolument ; leur somme dépend alors essentiellement de l'ordre des termes.

Soit (S) une telle série ; puisqu'elle n'est pas absolument convergente, on peut prendre assez de termes parmi les termes positifs pour que leur somme dépasse tel nombre que l'on voudra ; de même, on peut prendre assez de termes négatifs pour que leur somme soit moindre algébriquement que tel nombre négatif que l'on voudra ; ceci posé, soit a un nombre quelconque, écrivons d'abord les premiers termes positifs de (S), dans l'ordre où ils se présentent, et arrêtons-nous dès que leur somme dépasse a ; écrivons à la suite les premiers termes négatifs de (S), sans changer leur ordre, et arrêtons-nous dès que la somme de tous les termes écrits est inférieure à a ; écrivons à la suite des termes positifs de (S), en commençant par le premier de ceux qui ont été négligés, et arrêtons-nous dès que la somme de tous les termes écrits est supérieure à a ; recourons ensuite aux termes négatifs, etc... En continuant ainsi indéfiniment, on formera une nouvelle série, composée des mêmes termes que (S) et dans laquelle la somme des n premiers termes est tantôt plus petite, tantôt plus grande que a ; on voit sans peine que cette somme, lorsque n augmente indéfiniment, a a pour limite.

Si, en effet, le p^e terme de la série ainsi formée est, par exemple, un terme positif, suivi de q termes négatifs, suivis eux-mêmes de termes positifs, on aura en désignant comme d'habitude par S_n la somme des n premiers termes de la série (S).

$$S_{p-1} \leqq a < S_p,$$
$$S_p > S_{p+1} > \dots > S_{p+q-1} \geqq a > S_{p+q}.$$

La première inégalité montre que la différence entre S_p et a est au plus égale à $S_p - S_{p-1}$, c'est-à-dire au p^e terme de (S), il en est de même, en vertu des secondes inégalités des différences entre a et S_{p+1}, S_{p+2}, ..., S_{p+q-1} ; quant à la différence entre a et S_{p+q}, elle est au plus égale au $(p+q)^e$ terme ; comme les termes de la

série (S) décroissent indéfiniment, quand leur rang augmente indéfiniment, on a $\lim_{n=\infty} (S_n - a) = 0$.

III. — PRODUITS INFINIS

117. — L'intérêt qui s'attache aux séries à termes positifs se retrouve dans les produits infinis

$$(P) \qquad (1 + u_1)(1 + u_2) \ldots (1 + u_n) \ldots$$

pour lesquels tous les termes $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ sont positifs. Il est aisé tout d'abord d'avoir la condition de convergence d'un tel produit ; le produit $p_n = (1 + u_1)(1 + u_2) \ldots (1 + u_n)$ de n premiers facteurs va en augmentant avec n ; il faut et suffit, pour la convergence, que ce produit n'augmente pas indéfiniment avec n ; or ce produit est évidemment supérieur à $1 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

Il faut donc que la somme s_n des n premiers termes de la série à termes positifs

$$(S) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

ne croisse pas indéfiniment quand n augmente indéfiniment, ce qui revient à dire que la série (S) doit être convergente. Réciproquement, il est aisé de voir que, s'il en est ainsi, le produit (P) est convergent ; en effet si l'on se donne un nombre positif $\varepsilon < 1$, il existe alors un nombre naturel n tel que, quel que soit le nombre naturel r, on ait

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+r} < \varepsilon ;$$

on a d'ailleurs

$$p_{n+r} = p_n (1 + u_{n+1})(1 + u_{n+2}) \ldots (1 + u_{n+r}) ;$$

mais il est clair que l'on a

$$(1 + u_{n+1})(1 + u_{n+2}) \ldots (1 + u_{n+r}) < 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^r < \frac{1}{1 - \varepsilon} ;$$

donc

$$p_{n+r} < p_n \frac{1}{1 - \varepsilon} ;$$

lors donc que r augmente indéfiniment, p_{n+r} reste au-dessous d'une limite fixe et, par suite, le produit P est convergent.

On pourrait encore, d'une façon plus directe, remarquer que l'on a, en désignant par s_n la somme des n premiers termes de (S),

$$p_n < 1 - \frac{s_n}{1} + \frac{s_n^2}{1.2} + \ldots + \frac{s_n^n}{1.2.3\ldots n}$$

$$< 1 + \frac{K}{1} + \frac{K^2}{1.2} + \ldots + \frac{K^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

où K désigne un nombre quelconque supérieur à la somme de la série (S) : la série qui figure dans le second membre est toujours convergente, comme on l'a vu au n° **95**.

Les produits convergents à termes tous positifs tels que (P) jouissent de la propriété suivante, analogue à celle qui a été signalée pour les séries à termes positifs :

L'ensemble des nombres distincts obtenus en faisant le produit d'autant de facteurs que l'on voudra, pris dans (P), est borné en haut et la borne supérieure de cet ensemble est la valeur du produit infini.

Il en résulte que la valeur du produit (P) est indépendante de l'ordre des facteurs.

Considérons maintenant un produit infini de la forme

$$(\mathrm{P}') \qquad (1 - u_1)(1 - u_2)\ldots(1 - u_n)\ldots,$$

où tous les nombres $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ sont positifs et différents de 1. Je vais montrer que la convergence de la série

$$(\mathrm{S}) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est encore la condition nécessaire et suffisante pour que le produit infini (P′) soit convergent.

Je supposerai, dans la démonstration, que les nombres u_1, u_2, $\ldots$, u_n, $\ldots$ sont tous plus petits qu'un nombre $\alpha < 1$; cette restriction sera levée plus tard.

En désignant par p'_n le produit des n premiers facteurs de (P′) on aura

$$\frac{1}{p'_n} = \left(1 + \frac{u_1}{1 - u_1}\right)\left(1 + \frac{u_2}{1 - u_2}\right)\ldots\left(1 + \frac{u_n}{1 - u_n}\right);$$

comme tous les nombres

$$\frac{u_1}{1 - u_1}, \quad \frac{u_2}{1 - u_2}, \quad \ldots, \quad \frac{u_n}{1 - u_n}, \quad \ldots$$

sont positifs, il faut et il suffit, pour que $\frac{1}{p_n}$ tende vers une limite quand n augmente indéfiniment, que la série à termes positifs

$$(S') \qquad \frac{u_1}{1-u_1} + \frac{u_2}{1-u_2} + \ldots + \frac{u_n}{1-u_n} + \ldots$$

soit convergente ; or les termes de cette série sont compris entre les termes de même rang des deux séries

$$\frac{u_1}{1-\alpha} + \frac{u_2}{1-\alpha} + \ldots + \frac{u_n}{1-\alpha} + \ldots,$$

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

qui sont convergentes ou divergentes en même temps que la série (S'), puisque la somme d'autant de termes que l'on voudra pris dans cette série est inférieure à la somme de la première série supposée convergente et supérieure à la somme des termes correspondants de la seconde. Donc, pour que $\frac{1}{p_n}$ tende vers une limite, ou pour que p'_n tende vers une limite différente de zéro, quand n augmente indéfiniment, il faut et il suffit que la série (S) soit convergente : si cette série était divergente, p'_n aurait pour limite zéro.

La valeur du produit infini

$$\left(1 + \frac{u_1}{1-u_1}\right)\left(1 + \frac{u_2}{1-u_2}\right) \ldots \left(1 + \frac{u_n}{1-u_n}\right) \ldots,$$

supposé convergent, étant indépendante de l'ordre de ses facteurs, il en est de même pour le produit

$$(1-u_1)(1-u_2)\ldots(1-u_n)\ldots.$$

Soit enfin un produit

$$(Q) \qquad (1+v_1)(1+v_2)\ldots(1+v_n)\ldots,$$

pour lequel les nombres $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ peuvent être positifs ou négatifs, mais sont tels que la série

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

soit absolument convergente ; je suppose de plus que tous ces nombres soient, en valeurs absolues, plus petits qu'un nombre positif

$\alpha < 1$; si l'on désigne par $u_1, u_2, \ldots, u_i, \ldots$ ceux des nombres v_1, $v_2, \ldots, v_n, \ldots$ qui sont positifs et par $u'_1, u'_2, \ldots, u'_j, \ldots$ ceux qui sont négatifs ; les deux produits

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \ldots (1 + u_i) \ldots,$$
$$(1 + u'_1)(1 + u'_2) \ldots (1 + u'_j) \ldots,$$

sont convergents et le second a une limite différente de zéro ; un raisonnement pareil à celui qui a été employé (nº **98**) pour les séries montrera que le produit des n premiers facteurs du produit infini Q, lorsque n augmente indéfiniment, a une limite égale au produit des valeurs des deux produits infinis qui précèdent.

Enfin, on peut s'affranchir de la restriction imposée aux termes de la série

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots,$$

d'être, en valeur absolue, plus petits que 1, pourvu que cette série soit absolument convergente. A partir d'un certain rang n, en effet, les termes satisferont certainement à cette condition, on est donc assuré que le produit infini

$$(1 + v_{n+1})(1 + v_{n+2}) \ldots (1 + v_{n+r}) \ldots$$

est convergent et a une limite différente de zéro ; soit T cette limite ; le produit des m premiers facteurs du produit infini

$$(1 + v_1)(1 + v_2) \ldots (1 + v_{n+r}) \ldots,$$

lorsque m grandira indéfiniment, aura pour limite

$$T.(1 + v_1)(1 + v_2) \ldots (1 + v_n).$$

Cette limite sera différente de zéro, si aucun des facteurs $1 + v_1$, $1 + v_2, \ldots, 1 + v_n$ n'est égale à zéro.

118. — On peut maintenant énoncer les définitions et les propriétés qui suivent :

Un produit iufini

$$(1 + u_1)(1 + u_2) \ldots (1 + u_n) \ldots,$$

où les nombres $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ peuvent être positifs ou négatifs, est dit absolument convergent si la série

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est absolument convergente.

Le produit des n premiers facteurs d'un produit absolument convergent tend, lorsque n augmente indéfiniment, vers une limite; cette limite est la *valeur du produit*; elle est indépendante de l'ordre des facteurs du produit infini; elle est nulle si l'un de ces facteurs est nul, et seulement dans ce cas.

On voit que les produits absolument convergents sont maniables au même degré que les séries absolument convergentes.

119. — Soit $\prod_{\alpha=1}^{\alpha=\infty}(1+a_\alpha) = (1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_\alpha)\ldots$ un produit infini, tel que la série $\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} a_\alpha$ soit absolument convergente; la proposition importante à laquelle on vient de parvenir, à savoir que le produit des n facteurs $A_n = \prod_{\alpha=1}^{\alpha=n}(1+a_\alpha)$ a pour n infini, une limite qui ne dépend pas de l'ordre dans lequel sont rangés les facteurs du produit infini, peut s'obtenir d'une autre manière qu'il sera plus tard facile de généraliser, et que, pour cette raison, il y a lieu de faire connaître ([1]). Cette proposition, comme on en a déjà fait l'observation, est immédiate lorsque les termes a_α sont tous positifs ou nuls. Admettons la dans ce cas et en désignant par a'_α la valeur absolue de a_α, posons

$$A'_n = \prod_{\alpha=1}^{\alpha=n}(1+a'_\alpha), \qquad A' = \lim_{n=\infty} A'_n;$$

l'existence de la limite A' résulte de ce que la série $\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} a'_\alpha$ est convergente par hypothèse.

Si ε est un nombre positif quelconque, on peut lui faire corres-

([1]) Le lecteur trouvera ce mode de raisonnement systématiquement employé pour établir les propriétés principales des séries et produits infinis à termes imaginaires dans l'Introduction des *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques* de MM. Tannery et Molk, (t. I). Les nos **119**, **124** et la fin du no **120** suffisent pour en saisir l'esprit.

pondre un nombre naturel r assez grand pour que l'on ait, sous les conditions $m > n > r$

$$0 \leqq A'_m - A'_n < \varepsilon.$$

Considérons maintenant la différence $A_m - A_n$; si l'on développe les produits.

$$A_m = 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_m + a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots,$$
$$A_n = 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots,$$

on voit que tous les termes qui figurent dans le second, figurent dans le premier, en sorte que la différence $A_m - A_n$ est une somme de termes pris dans $a_1, a_2, \dots, a_m$, de produits de deux, trois, ... de ces termes ; quant à la différence $A'_m - A'_n$. elle est, lorsqu'on l'a développée, composée de la même façon, si ce n'est que $a'_1, a'_2, \dots a'_m$ y remplacent $a_1, a_2, \dots, a_m$. Il suffit de se rappeler que la valeur absolue d'un produit est le produit des valeurs absolues de ses facteurs et que la valeur absolue d'une somme est au plus égale à la somme des valeurs absolues de ses parties pour en conclure que l'on a

$$| A_m - A_n | \leqq A'_m - A'_n$$

sous la seule condition $m > n$, et par conséquent, si m et n sont plus grands que r,

$$| A_m - A_n | < \varepsilon.$$

Ceci suffit à prouver que A_n a une limite pour m infini.

Considérons maintenant les deux produits infinis

$$\prod_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} (1 + a_\alpha), \qquad \prod_{\beta=1}^{\beta=\infty} (1 + b_\beta),$$

formés avec les mêmes facteurs, rangés dans des ordres différents : on suppose que la série $\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} a_\alpha$. et par conséquent la série $\sum_{\beta=1}^{\beta=\infty} b_\beta$, est absolument convergente ; désignons par A_m, B_n les produits de m, n facteurs pris respectivement au commencement du premier et du second produit infini, par a'_α, b'_β les valeurs absolues

de a_α, b_β, par A'_m, B'_n ce que deviennent A_m, B_n quand on y remplace $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ou $b_1, b_2, \ldots, b_n$ par $a'_1, a'_2, \ldots, a'_m$, ou $b'_1, b'_2, \ldots, b'_n$. Lorsqu'on se donne n, on peut prendre m assez grand pour que tous les facteurs qui figurent dans B_n figurent aussi dans A_m ; dans ces conditions, on aura, comme tout à l'heure,

$$|A_m - B_n| \leqq A'_m - B'_n ;$$

or, lorsque n grandit indéfiniment, il en est de même de m ; dans ces conditions A'_m et B'_n tendent vers la même limite ; il faut donc que l'on ait aussi

$$\lim_{m=\infty} A_m = \lim_{n=\infty} B_n.$$

Il est à peine besoin de dire que le même mode de raisonnement aurait pu être employé pour établir les propositions analogues relatives aux séries convergentes.

Faisons encore, en conservant les mêmes notations, les remarques suivantes, relatives aux produits infinis

$$A = \prod_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} (1 + a_\alpha), \qquad A' = \prod_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} (1 + a'_\alpha)$$

supposés convergents ; considérons les produits infinis

$$\prod_{\alpha=n+1}^{\alpha=\infty} (1 + a_\alpha) = 1 + R_n, \qquad \prod_{\alpha=n+1}^{\alpha=\infty} (1 + a'_n) = 1 + R'_n$$

qui jouent, par rapport aux précédents, un rôle analogue à celui du reste dans une série ; on aura

$$A = A_n (1 + R_n), \qquad A' = A'_n (1 + R'_n),$$

et les raisonnements antérieurs montrent que l'on a $|R_n| \leqq R'_n$. La convergence du produit A', dont tous les facteurs sont supérieurs ou égaux à 1, exige que l'on ait $\lim_{n=\infty} R'_n = 0$; on peut donc faire correspondre à chaque nombre positif ε un nombre naturel p, tel que l'on ait, sous la condition $n > p$,

$$|R_n| \leqq R'_n < \varepsilon ;$$

si l'on a choisi $\varepsilon > 1$, $1 + R_n$ ne pourra être nul si l'on suppose $n > p$; A ne pourra donc être nul que si A_n, et par suite un de ses facteurs, est nul. On voit ainsi qu'un produit infini, absolument convergent ne peut être nul sans qu'un de ses facteurs soit nul.

Il peut être utile d'avoir observé que si l'on fait

$$\varepsilon_n = \sum_{\alpha = n+1}^{\alpha = \infty} a'_\alpha$$

et si l'on suppose $\varepsilon_n < 1$, on a

$$1 + R'_n \leqq \frac{1}{1 - \varepsilon_n}, \qquad R'_n \leqq \frac{\varepsilon_n}{1 - \varepsilon_n},$$

comme il résulte sans peine de ce que l'on a dit au n° **117**.

120. — Les considérations et propositions relatives aux séries qui ont été développées dans les n^{os} **102**, **103**, **110** s'étendent, avec les changements convenables aux produits infinis.

Considérons, comme au n° **102**, un ensemble dénombrable (E) d'objets distincts, dont on désignera l'un quelconque par la lettre ρ et supposons qu'à chaque objet ρ de cet ensemble corresponde un nombre v_ρ tel que la série $\sum_\rho v_\rho$, attachée à l'ensemble (E) soit absolument convergente, il sera permis de parler du produit infini $\prod_\rho (1 + v_\rho)$ attaché à ce même ensemble.

La valeur de ce produit infini sera celle de

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + u_n),$$

en supposant qu'on ait établi une correspondance parfaite entre l'ensemble (E) et l'ensemble des nombres naturels et que l'on désigne par u_n le même nombre que v_ρ lorsque l'élément ρ et le nombre naturel n se correspondent : cette valeur ne dépend pas du mode de correspondance établi entre (E) et l'ensemble des nombres naturels. Soit maintenant (A) un autre ensemble dénombrable d'objets distincts α ; supposons que l'ensemble (E) soit décomposé

en une infinité dénombrable d'ensembles partiels (E_α), sans élément commun, dont chacun corresponde à un élément α de (A). A chacun de ces ensembles partiels est attaché un produit infini $\prod_\rho (1 + v_\rho)$ où le produit est étendu à tous les éléments de l'ensemble partiel (E_α). Désignons par $1 + V_\alpha$ la valeur de ce produit infini. Le produit infini $\prod_\alpha (1 + V_\alpha)$, où le produit est étendu à tous les éléments α de l'ensemble (A) est, absolument convergent et sa valeur est égale à celle du produit infini $\prod_\rho (1 + v_\rho)$ attaché à E.

La démonstration suit pas à pas celle qui concerne les séries, et je crois très inutile d'en infliger l'ennui au lecteur; je m'arrêterai toutefois un instant sur un petit détail, qui pourrait échapper au premier abord.

Afin d'établir la proposition analogue à celle du n° **104**, on a à considérer un produit dont les facteurs sont des produits infinis en nombre fini. Je me contenterai de considérer le produit de deux produits infinis (absolument convergents)

$$U = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + u_n), \qquad V = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + v_n),$$

le raisonnement étant le même dans le cas d'un nombre quelconque r de produits infinis.

Considérons le produit infini $W = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + w_n)$ dans lequel le n^e facteur $1 + w_n$ est égal à $[(1 + u_n)(1 + v_n)]$: il est nécessaire de prouver que ce produit infini W est absolument convergent et a pour valeur UV ; les mêmes choses doivent être prouvées du produit qui se déduit de W en y supprimant les crochets, c'est-à-dire du produit infini dont $1 + u_n$ est le $(2n - 1)^e$ et $1 + v_n$ le $2n^e$ facteur.

D'après la définition de $1 + w_n$, on a $w_n = u_n + v_n + u_n v_n$;

désignons par U_n, V_n, W_n les produits des n premiers facteurs dans les trois produits infinis U, V, W ; on aura $W_n = U_n V_n$ et par suite $\lim_{n=\infty} W_n = UV$. Toutefois l'existence d'une limite de W_n, pour n infini, ne suffit pas à prouver la convergence absolue du produit infini dont le n^e facteur est $1 + w_n$, à moins que tous les nombres w_n ne soient positifs ou nuls (n° **117**). Cette convergence absolue étant ainsi assurée quand les nombres u_n, v_n sont eux-mêmes positifs ou nuls, posons dans le cas général

$$u'_n = |u_n|, \quad v'_n = |v_n|, \quad w'_n = u'_n + v'_n + u'_n v'_n ;$$

on aura $|w_n| \leqq w'_n$. Le produit infini dont le n^e facteur est $1 + w$ est convergent ; il en est de même de la série à termes positifs $\sum_{n=1}^{n=\infty} w'_n$; la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} w_n$ étant absolument convergente, le produit infini $\prod_{n=1}^{n=\infty}(1 + w_n)$ est aussi absolument convergent. Sa valeur est UV.

Maintenant, le produit infini qui se déduit de W en supprimant les crochets, et dont $1 + u_n$ et $1 + v_n$ sont respectivement le $(2n - 1)^e$ et le $(2n)^e$ facteur, est absolument convergent, puisque la série

$$u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + \ldots + u_n + v_n + \ldots$$

est absolument convergente. Le produit des $2n$ premiers facteurs de ce produit est encore $U_n V_n$; la valeur du produit infini est UV comme celle de W.

121. — Si, par exemple, l'ensemble (E) est l'ensemble des couples (α, β) de nombres naturels, sous la condition que la série

$$\sum_{\alpha, \beta} v_{\alpha, \beta}, \qquad \begin{matrix} \alpha = 1, 2, 3, \ldots, \\ \beta = 1, 2, 3, \ldots, \end{matrix}$$

soit absolument convergente, la valeur du produit infini

$$\prod_{\alpha, \beta}(1 + v_{\alpha, \beta})$$

pourra s'obtenir en posant

$$\prod_{\beta=1}^{\beta=\infty} (1 + v_{\alpha,\beta}) = 1 + V_\alpha,$$

puis en formant le produit infini $\prod_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} (1 + V_\alpha)$.

On aurait pu d'ailleurs faire varier α, puis β ; on aurait obtenu le même résultat ; c'est ce qu'on exprime par l'égalité

$$\prod_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \prod_{\beta=1}^{\beta=\infty} (1 + v_{\alpha,\beta}) = \prod_{\beta=1}^{\beta=\infty} \prod_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} (1 + v_{\alpha,\beta}).$$

De même qu'au n° **110**, on a supprimé les parenthèses inutiles ; le premier membre, par exemple, pourrait s'écrire plus explicitement

$$\prod_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \left[\prod_{\beta=1}^{\beta=\infty} (1 + v_{\alpha,\beta}) \right].$$

Il est à peine besoin de dire que le symbole

$$\prod_{n=-\infty}^{n=+\infty} (1 + u_n),$$

en supposant absolument convergente la série

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} u_n,$$

représente le produit des valeurs des deux produits infinis

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + u_n), \qquad \prod_{n=0}^{n=-\infty} (1 + u_n),$$

122. — Considérons par exemple les deux produits infinis

$$\Phi(x) = x \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right), \quad \Psi(x) = \prod_{n=1}^{n=\infty} \left[1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2}\right],$$

qui jouent un rôle important dans la théorie des fonctions circulaires; ils sont absolument convergents quelque soit x, cela résulte pour le premier par exemple, de la convergence (n° **96**) de la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^2}{n^2} = x^2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2};$$

si, dans le premier produit infini, on partage l'ensemble des nombres naturels n dans l'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres impairs, puis que l'on groupe en un produit infini les facteurs qui correspondent aux nombres pairs, dans un autre produit infini ceux qui correspondent aux nombres impairs, on aura par le théorème précédent

$$\Phi(x) = x \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{x^2}{4n^2}\right) \prod_{n=1}^{n=\infty} \left[1 - \frac{x^2}{(2n-1)^2}\right]$$

ou

$$\Phi(x) = 2\Phi\left(\frac{x}{2}\right) \Psi\left(\frac{x}{2}\right).$$

Dans cette application, l'ensemble (E) était l'ensemble des nombres naturels; il a été décomposé en deux ensembles partiels. Au reste ce résultat aurait pu aussi bien être obtenu par l'application de la règle relative au produit de deux produits infinis, sur laquelle on a appelé l'attention du lecteur à la fin du n° **120**.

123. — Considérons encore les quatre produits infinis

$$q_0 = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - q^{2n}), \qquad q_1 = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + q^{2n})$$

$$q_2 = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + q^{2n-1}), \qquad q_3 = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - q^{2n-1})$$

que l'on rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques et où q désigne un nombre plus petit que 1 en valeur absolue ; il est clair qu'ils sont absolument convergents ; on aura

$$q_0 = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - q^n) . \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + q^n) ;$$

dans chacun des deux produits infinis, qui figurent dans le second membre, groupons ensemble les termes pour lesquels n est pair et ceux pour lesquels n est impair, on obtiendra évidemment

$$q_0 = q_0 \, q_1 \, q_2 \, q_3,$$

d'où, puisque q_0 dont aucun facteur n'est nul, est différent de zéro,

$$q_1 \, q_2 \, q_3 = 1,$$

ou, si l'on veut, en remplaçant q^2 par a,

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + a^n) . \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - a^{2n-1}) = 1.$$

124. — Un produit infini absolument convergent

$$P = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + u_n),$$

peut de diverses façons être transformé en série.

Soit P_n le produit des n premiers facteurs de P. Si l'on considère la série à entrée r^{uple}

$$S_r = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r} u_{\alpha_1} u_{\alpha_2} \ldots u_{\alpha_r},$$

où la sommation est étendue à l'ensemble (E) des systèmes de r

nombres naturels différents $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ tels que l'on ait $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_r$, cette série est absolument convergente et l'on a

$$P = 1 + S_1 + S_2 + \ldots + S_r + \ldots,$$

la série qui figure dans le second membre étant elle-même absolument convergente.

Établissons d'abord cette proposition pour le produit infini obtenu en remplaçant u_n par $u'_n = |u_n|$; désignons par S'_r, P'_n, P' les séries ou produits formés au moyen de u'_1, u'_2, ..., comme S_r, P_n, P sont formés au moyen de u_1 u_2, ... Si l'on développe P'_n, on trouvera

$$(1) \qquad P'_n = 1 + \sigma'_1 + \sigma'_2 + \ldots + \sigma'_r + \ldots + \sigma'_n,$$

en désignant par σ'_r la somme des produits r à r des quantités u'_1, u'_2, ..., u'_n : on peut supposer que, dans chacun de ces produits les facteurs soient rangés de façon que les indices aillent en croissant ; tous les termes de σ'_r figurent dans S'_r ; d'ailleurs σ'_r dépend de n, que r ne peut dépasser. Mais si l'on considère dans S'_r un nombre fini de termes, on pourra prendre n assez grand pour que tous ces termes figurent dans σ'_r et comme σ'_r est moindre que P'_n, et par suite que P', on voit que la somme d'autant de termes qu'on voudra pris dans S'_r est inférieure à P' ; la série S'_r est donc convergente ; sa somme, que je désignerai aussi par S'_r, est supérieure ou égale à σ'_r (quel que soit n) ; mais, comme, d'un autre côté, n peut être pris assez grand pour que σ'_r surpasse la somme de tels termes que l'on voudra pris dans S'_r, il faut que σ'_r ait pour limite S'_r quand n grandit indéfiniment.

Si dans l'inégalité

$$P'_n \geqq 1 + \sigma'_1 + \sigma'_2 + \ldots + \sigma'_r,$$

qui résulte de la formule (1), on fait croître n indéfiniment, on obtient

$$P' \geqq 1 + S'_1 + S'_2 + \ldots + S'_r,$$

et cette dernière inégalité montre que la série $\sum_{r=0}^{r=\infty} S'_r$, où l'on sup-

pose $S'_0 = 1$, est convergente. D'autre part la même égalité (1) montre que l'on a

$$P'_n - 1 - \sigma'_1 - \sigma'_2 - \ldots - \sigma'_r = \sigma'_{r+1} + \sigma'_{r+2} + \cdots + \sigma'_n$$
$$\leqq S'_{r+1} + S'_{r+2} + \ldots + S'_n$$
$$\leqq \sum_{n=r+1}^{n=\infty} S'_n;$$

Or, le reste d'une série convergente, bornée au $(r+1)^e$ terme, peut être supposé plus petit que tel nombre ε que l'on voudra, pourvu que l'on prenne r assez grand; on aura dans ces conditions

$$P'_n - 1 - \sigma'_1 - \sigma'_2 - \ldots \sigma'_r < \varepsilon,$$

et en faisant croître n indéfiniment

$$P' - 1 - S'_1 - S'_2 - S'_r \leqq \varepsilon;$$

on voit bien que l'on a

$$P' = \sum_{n=0}^{n=\infty} S'_n.$$

La série S'_r étant convergente, il est clair que la série S_r est absolument convergente, que l'on a $S'_r \geqq | S_r |$ et que, par suite, la série $1 + S_1 + S_2 + \ldots$ est absolument convergente. Tous les termes qui figurent dans la somme σ_r des produits r à r des quantités u_1, $u_2, \ldots u_n$, figurent dans S_r; ils disparaissent donc dans la différence $S_r - \sigma_r$ et l'on a

$$| S_r - \sigma_r | \leqq S'_r - \sigma'_r;$$

cette inégalité montre que σ_r a pour limite S_r quand n augmente indéfiniment, puisque, alors, le second membre tend vers zéro. Enfin, on a, toujours pour une raison de la même nature

$$| P_n - 1 - \sigma_1 - \sigma_2 - \ldots - \sigma_r | \leqq P'_n - 1 - \sigma'_1 - \sigma'_2 - \ldots - \sigma'_r,$$

d'où, en faisant croitre n indéfiniment

$$| P - 1 - S_1 - S_2 - \ldots - S_r | \leqq P' - 1 - S'_1 - S'_2 - \ldots - S'_r;$$

et par suite

$$P = 1 + S_1 + S_2 + \ldots + S_r + \ldots.$$

125. — On peut encore, pour transformer en série convergente le produit infini

$$P = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + u_n),$$

employer la méthode expliquée au n° **89** pour déduire d'une suite $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ une série dans laquelle la somme des n premiers termes soit P_n : on partira de l'identité

$$P_{n+1} = P_1 + (P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + \ldots + (P_{n+1} - P_n),$$

où l'on regardera P_n comme le produit des n premiers facteurs du produit P, et, par conséquent, P_1 comme égal à $1 + u_1$, P_{n+1} comme égal à $P_n(1 + u_n)$; on en déduit

$$P_{n+1} = 1 + u_1 + P_2 u_2 + P_3 u_3 + \ldots + P_n u_n,$$

et l'on voit que P_{n+1} a, ou non, une limite pour n infini, suivant que la série

$$1 + u_1 + P_2 u_2 + \ldots + P_n u_n + \ldots$$

est, ou non, convergente. La somme de la série, si elle est convergente, est égale à P.

126. — L'identité précédente, si simple qu'elle soit, mérite de nous arrêter un instant : si l'on y change, pour la commodité de ce qui va suivre, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ en $\beta_n, \beta_{n-1}, \ldots, \beta_1$ et si l'on divise par le produit $(1 + \beta_1)(1 + \beta_2)\ldots(1 + \beta_n)$, il vient :

$$\text{(I)} \quad \frac{\beta_1}{1 + \beta_1} + \frac{\beta_2}{(1 + \beta_1)(1 + \beta_2)} + \ldots + \frac{\beta_n}{(1 + \beta_1)(1 + \beta_2)\ldots(1 + \beta_n)}$$
$$= 1 - \frac{1}{(1 + \beta_1)(1 + \beta_2)\ldots\ldots(1 + \beta_n)}.$$

Cette identité met en évidence le théorème suivant ; la série

$$(\beta) \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\beta_n}{(1 + \beta_1)(1 + \beta_2)\ldots(1 + \beta_n)},$$

où l'on suppose $\beta_n \geqq 0$, quel que soit n, est toujours convergente ; elle a pour somme

$$1 - \frac{1}{\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+\beta_n)}$$

quand la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} \beta_n$ est convergente ; Quand cette dernière série est divergente, la série (β) a pour somme l'unité, puisque, alors, le produit

$$(1+\beta_1)(1+\beta_2)\dots(1+\beta_n)$$

augmente indéfiniment avec n.

Quand on se donne une série convergente $u_1 + u_2 + \dots$, à termes positifs, dont la somme est inférieure à 1, on peut toujours la mettre sous la forme (β) ; il suffira en effet de poser

$$\frac{\beta_n}{(1+\beta_1)(1+\beta_2)\dots(1+\beta_n)} = u_n.$$

L'identité (1) donne de suite

$$\frac{1}{(1+\beta_1)(1+\beta_2)\dots(1+\beta_n)} = 1 - u_1 - u_2 - \dots - u_n,$$

d'où l'on conclut

$$\beta_n = \frac{u_n}{1 - u_1 - u_2 - \dots - u_n},$$

et il est clair que l'on aura $\beta_n > 0$.

Le lecteur reconnaîtra sans peine que la même identité (1) fournit la solution de cette question, dont on voit de suite qu'elle ne peut admettre qu'une solution : former une série à termes positifs, dont la somme est donnée, et dans laquelle le rapport du n^e terme u_n, au reste R_n de la série limitée à ce terme soit un nombre donné positif β_n ; lorsque la somme donnée est 1, ce que l'on peut toujours supposer, quitte à diviser chaque terme par la somme de la série, on voit de suite que la solution de la question posée est fournie par la série (β), quand la série dont le n^e terme est β_n est

divergente. Le problème n'est d'ailleurs possible que dans ce cas. Il en résulte que, si la série (à termes positifs) dont le n^e terme est u_n est convergente, la série dont le n^e terme est $\frac{u_n}{R_n}$ est divergente.

L'identité (I), quand on y change β_n en $-\alpha_n$, prend la forme

$$\text{(II)} \quad \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)} + \dots + \frac{\alpha_n}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\dots(1-\alpha_n)}$$
$$= \frac{1}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\dots(1-\alpha_n)} - 1.$$

Bornons-nous au cas où l'on a, quelque soit n, $0 < \alpha_n \leq 1$; on voit, d'après cette identité, que la série

$$(\alpha) \qquad \sum \frac{\alpha_n}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\dots(1-\alpha_n)}$$

est convergente ou divergente en même temps que le produit infini $\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-\alpha_n)$, ou que la série à termes positifs $\sum_{n=1}^{n=\infty}\alpha_n$.

Les termes de cette dernière série sont respectivement plus petits que ceux de la série (α) : il est d'ailleurs bien clair que, si l'on se donne les termes de l'une des séries, les termes de l'autre sont déterminés par là même ; au reste si l'on désigne par u_n le n^e termes de la série (α), l'identité (II) fournit, comme tout à l'heure, la relation

$$\alpha_n = \frac{u_n}{1 + u_1 + u_2 + \dots + u_n}.$$

Ainsi les deux séries à termes positifs

$$\sum u_n, \qquad \sum \frac{u_n}{1 + u_1 + u_2 + \dots + u_n}$$

sont en même temps convergentes ou divergentes.

IV. — RÈGLES DE CONVERGENCE

127. — Ce qui précède montre assez qu'il est très utile de savoir reconnaître si une série est absolument convergente, c'est-à-dire si

la série à termes positifs ou nuls formés par les valeurs absolues de ses termes est convergente. Le problème revient donc à distinguer la convergence ou la divergence d'une série à termes positifs ou nuls; on peut dire aussi bien « d'une série à termes positifs », car il est clair qu'on peut supprimer les termes nuls. Il a pu être avantageux, dans ce qui précède, de ne pas exclure la possibilité de termes nuls; mais cette possibilité, comme le lecteur le reconnaîtra lui-même, compliquerait l'énoncé de plusieurs des règles relatives à la convergence ou à la divergence : il est entendu que dans les numéros consacrés à l'étude de ces règles, quand on parlera de séries à termes positifs, ces séries n'admettront pas de termes nuls.

Il convient encore de remarquer que lorsqu'on a la valeur ou une limite supérieure (au sens de la théorie des erreurs) de la valeur d'une série à termes positifs, on a, par cela même, une limite supérieure de la valeur absolue de toute série formée de termes dont les valeurs absolues seraient respectivement égales, ou inférieures, aux termes de la série considérée. Cette remarque s'applique en particulier au *reste* d'une série absolument convergente. L'évaluation même grossière, du reste d'une série renseigne sur la façon plus ou moins rapide dont il tend vers 0, quand on prend de plus en plus de termes, c'est-à-dire de la façon plus ou moins rapide dont la série converge : d'un autre côté, cette évaluation est très utile pour les calculs numériques, puisqu'elle fournit une limite de l'erreur que l'on commet lorsqu'on prend pour valeur de la série la somme des n premiers termes [1].

[1] Le calcul d'un nombre, au moyen d'une série convergente dont la somme est égale à ce nombre, est une opération très fréquente, sur laquelle il convient de dire quelques mots. Dans les séries qu'on emploie pour cet usage, le reste est habituellement du même ordre de petitesse que le premier terme négligé et les termes de la série vont en décroissant assez rapidement.

Dans ces conditions, le procédé que l'on recommande habituellement pour calculer, par exemple, la somme de la série $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ avec p chiffres décimaux, consiste à calculer les valeurs des termes $u_1, u_2, u_3, \ldots$ avec $p+q$ chiffres décimaux, à $\frac{1}{10^{p+q}}$ près ou à $\frac{1}{2}\frac{1}{10^{p+q}}$ près; on calcule les termes, jusqu'au terme u_{r+1} qui, calculé avec cette même approximation, ne fournit plus que des zéros. Désignons alors la valeur absolue du reste par $\frac{a}{10^{p+q}}$; si l'on a une éva-

Un premier procédé, celui d'où dérivent presque tous les autres consiste à comparer la série proposée

$$(v) \qquad v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

à une série

$$(u) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

dont on connaît le caractère.

Je suppose les deux séries à termes positifs : si la série (u) est convergente et que les termes de la série (v) ne dépassent pas les termes correspondants de la série (u), il est clair que la série (v) est convergente ; de même si la série (u) est divergente et si les termes de la série (v) sont égaux ou supérieurs aux termes correspondants de la série (u), la série (v) est divergente. Ces conclusions subsistent pourvu que les circonstances que l'on a décrites se présentent à partir d'un certain terme, puisque pour ce qui concerne la con-

luation de ce reste, on pourra calculer grossièrement une valeur approchée de a par excès.

La somme des valeurs approchées de u_1, u_2, ..., u_n représentera la somme de la série avec une erreur moindre que

$$\frac{n+a}{10^{p+q}} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{n}{2}+a}{10^{p+q}},$$

suivant qu'on a dirigé le calcul d'une façon ou d'une autre ; pour que, dans le premier cas, par exemple, l'erreur soit moindre que $\frac{1}{10^p}$, il suffira que $a+n$ soit moindre que 10^q ; on voit que, si l'on ne cherche pas une très grande approximation, en sorte qu'on ne soit pas obligé de calculer un grand nombre de termes, il suffira bien souvent de prendre $q = 2$; il faudrait en effet pour que l'erreur commise fût plus grande que $\frac{1}{10^p}$, que $n+a$ fût supérieur à 100. Il est, en tout cas, assez naturel de commencer les calculs ainsi, sans même se préoccuper du reste, quitte, si l'on a quelques doutes sur la valeur de l'approximation, à s'assurer, par l'étude de ce reste, qu'on a atteint le degré d'approximation que l'on désire.

Supposons par exemple qu'on veuille calculer avec une erreur moindre que $\frac{1}{10^7}$ la somme de la série.

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.\,2} + \frac{1}{1.\,2.\,3} + \frac{1}{1.\,2.\,3.\,4} + \ldots,$$

Calculons les termes de manière à commettre sur chacun d'eux une erreur

vergence ou la divergence, on peut faire abstraction des premiers termes.

Si, par exemple, on prend pour la série (u) la progression géométrique

$$k + k^2 + \ldots + k^n + \ldots,$$

la série (v) est convergente si l'on a pour toutes les valeurs de n, à partir d'un certain rang

$$\sqrt[n]{v_n} \leqq k,$$

moindre que $\frac{1}{2}\,\frac{1}{10^7}$; on trouvera, en réunissant les trois premiers, qui se calculent exactement

$$\begin{array}{l} 2{,}5 \\ 0{,}1666667 \\ 0{,}0416667 \\ 0{,}0083333 \\ 0{,}0013889 \\ 0{,}0001984 \\ 0{,}0000248 \\ 0{,}0000028 \\ 0{,}0000003 \\ \hline 2{,}7182819 \end{array}$$

Le terme qui suit le dernier calculé serait

$$\frac{1}{1.2.3\ldots 11} < \frac{1}{10^7}.$$

Il n'y a que huit termes entachés d'erreur ; l'erreur qui provient de ce fait est moindre que $\frac{4}{10^7}$, l'erreur provenant du reste est vraisemblablement du même ordre que $\frac{1}{10^7}$; on verra par la règle donnée au n° **95**, que le reste est moindre $\frac{1}{1.\,2.\,3\,\ldots\,10}\cdot\frac{1}{10} < \frac{1}{10^7}$; l'erreur commise est sûrement moindre que $\frac{5}{10^7}$: le nombre cherché est compris entre 2,7182814 et 2,7182824 : si l'on prend la valeur 2,71828, on est certain, par la façon même dont les calculs ont été conduits, d'une part que l'erreur commise est non seulement moindre que $\frac{1}{10^5}$ mais même que $\frac{1}{2.10^5}$ et, d'autre part, que tous les chiffres conservés appartiennent à la représentation décimale de la somme de la série.

Lorsqu'on veut avoir une très grande approximation, ou que l'on a affaire à une série peu convergente, il peut être avantageux de commencer par l'examen préalable du reste, si l'on en a quelque expression facile à calculer grossièrement, et la détermination du nombre n de termes qu'il convient de calculer, comme du nombre de chiffres décimaux qu'il convient de conserver dans ces termes.

K étant un nombre plus petit que un, puisque, alors, la progression géométrique est une série convergente. Le reste de la série (v), borné au terme v_n, est alors au plus égal à $\frac{K^{n+1}}{1-K}$.

Au contraire si l'on a, pour toutes les valeurs de n, à partir d'un certain rang

$$\sqrt[n]{v_n} \geqq K,$$

K étant un nombre égal ou supérieur à un, la série (v) est divergente, puisque, alors, la progression géométrique est une série divergente; d'ailleurs dans ce cas v_n ne tend pas vers 0.

Il n'est pas inutile de remarquer, pour l'application de ce critère de convergence, d'une part, qu'il ne suppose nullement qu'on ait supprimé de la série les termes nuls, s'il y en a, d'autre part que, au lieu de considérer $\sqrt[n]{v_n}$, on pourrait, tout aussi bien, en désignant par p un nombre naturel fixe, considérer l'expression

$$\sqrt[n+p]{v_n} \quad \text{ou} \quad \sqrt[n-p]{v_n}$$

en effet, en plaçant p termes quelconques avant le premier terme de la série (v), on aura une seconde série qui sera convergente en même temps que la première et dans laquelle v_n est le terme de rang $n+p$; si l'on applique le critère à cette seconde série, c'est l'expression $\sqrt[n+p]{v_n}$ que l'on a à considérer. De même on pourrait, sans changer la convergence ou la divergence de la série proposée, supprimer p termes au commencement.

La règle précédente s'applique en particulier lorque $\sqrt[n]{v_n}$ tend vers une limite l pour n infini; si cette limite est un nombre plus petit que 1, les valeurs de $\sqrt[n]{v_n}$ finissent par rester au-dessous de tel nombre K que l'on voudra, compris entre l et 1, et par conséquent la série est convergente; si l est plus grand que 1, la série est divergente; il y a doute si $l = 1$, sauf dans le cas où $\sqrt[n]{v_n}$ reste, à partir d'une certaine valeur de n, égale ou supérieure à 1, auquel cas la série (v) est divergente.

Soit, par exemple, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ une suite de nombres tous différents de zéro, tels que l'on ait $\lim\limits_{n=\infty} |a_n| = +\infty$, la série

$$\frac{x}{a_1} + \frac{x^2}{a_2^2} + \ldots + \frac{x^n}{a_n^n} + \ldots$$

est absolument convergente quel que soit x ; en effet la racine n^e de la valeur absolue du n^e terme est $\left|\frac{x}{a_n}\right|$, dont la limite pour n infini est évidemment zéro.

Considérons encore la série dont le n^e terme est $q^{n^2}z^{2n}$, en désignant par q un nombre positif, plus petit que 1, et par z un nombre quelconque : la racine n^e de ce terme est $q^n z^2$; elle tend vers 0 quand n augmente indéfiniment : la série est convergente quel que soit z.

Il en est évidemment de même, pour toutes les valeurs de z autres que 0, de la série

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{n^2}z^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} q^{n^2}\left(z^{2n} + \frac{1}{z^{2n}}\right),$$

qui joue un rôle important dans la théorie des fonctions elliptiques.

128. — La règle précédente fournit un résultat intéressant concernant la convergence ou la divergence des séries de la forme

$$(a) \qquad a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$

sur lesquelles nous aurons à revenir : je suppose, pour le moment, que $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ soient des nombres positifs ([1]), ainsi que x, qu'on regardera dans ce qui suit comme un nombre fixe. En laissant de côté, ainsi qu'on l'a expliqué plus haut, le terme a_0, on est amené à étudier l'expression $\sqrt[n]{a_nx^n} = x\sqrt[n]{a_n}$. Si l'on a

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a_n} = l,$$

on aura

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{a_nx^n} = lx,$$

et, par suite, la série (a) sera convergente pour les valeurs de x moindres que $\frac{1}{l}$, divergente pour les valeurs de x plus grandes que $\frac{1}{l}$: il y aura doute pour $x = \frac{1}{l}$.

([1]) Rien n'empêche dans les raisonnements qui suivent de supposer que quelques uns de ces nombres, en nombre fini ou infini, soient nuls.

Ce résultat toutefois, suppose l'existence d'une limite pour $\sqrt[n]{a_n}$. Supposons seulement que la suite dont le n^e terme est $\sqrt[n]{a_n}$ soit bornée en haut et désignons par L la plus grande de ses limites (n° **64**). La série (a) est convergente pour les valeurs de x inférieures à $\frac{1}{L}$, divergente pour les valeurs de x supérieures à $\frac{1}{L}$.

En effet, si ε est un nombre positif quelconque, on sait que, parmi les nombres de la forme $\sqrt[n]{a_n}$, il n'y en a qu'un nombre fini qui soient supérieurs ou égaux à $L + \varepsilon$; pour les valeurs de n supérieures à un nombre positif p suffisamment grand, on aura

$$\sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon.$$

Si donc on prend x inférieur à $\frac{1}{L+\varepsilon}$, $\sqrt[n]{a_n x^n}$ sera, pour les valeurs de n plus grandes que p, moindre que $\frac{x}{L+\varepsilon} < 1$, et, par suite la série (a) sera convergente. Si maintenant on suppose seulement $x < \frac{1}{L}$, il suffira de prendre $\varepsilon < \frac{1 - Lx}{x}$, pour être assuré que x est moindre que $\frac{1}{L+\varepsilon}$, la convergence est encore assurée.

Au contraire si ε est un nombre positif plus petit que L, il y aura une infinité de nombres de la forme $\sqrt[n]{a_n}$ qui seront plus grands que $L - \varepsilon$; si donc on prend x plus grand que $\frac{1}{L-\varepsilon}$, il y aura une infinité de nombres de la forme $\sqrt[n]{a_n x^n}$ qui seront plus grands que 1; il y aura donc dans la série (a) une infinité de termes plus grands que 1; elle sera divergente. Il en est de même, pourvu que x soit plus grand que $\frac{1}{L}$. Pour $x = \frac{1}{L}$, on ne sait pas si la série est convergente ou divergente.

Si L était nul, la série (a) serait convergente pour toutes les valeurs de x : c'est ce qui arrive pour la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} q^{n^2} x^{2n}$, étudiée plus haut, lorsque le nombre positif q est plus petit que 1.

Si enfin L n'existe pas, c'est-à-dire si l'ensemble des nombres distincts de la forme $\sqrt[n]{a_n}$ n'est pas borné en haut, le même mode de raisonnement montre que la série (a) est divergente quel que soit

le nombre positif x. En effet si A est un nombre positif quelconque, il y a alors une infinité de nombres de la forme $\sqrt[n]{a_n}$ qui sont plus grands que A, et par suite une infinité de nombres de la forme $\sqrt[n]{a_n x^n}$ qui sont plus grands que Ax; si donc on prend A plus grand que $\frac{1}{x}$, on voit qu'il y a dans la série (a) une infinité de termes plus grands que 1 : la série est divergente.

On voit donc qu'à la suite des nombres positifs $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ est attaché un nombre R qu'on prendra égal à 0, dans le cas où la suite dont le n^e terme est $\sqrt[n]{a_n}$ n'est pas bornée en haut, qu'on prendra égal à $\frac{1}{L}$ quand cette suite admet une plus grande limite différente de 0, qu'on regardera comme infini quand cette plus grande limite est nulle et qui jouit de la propriété suivante : la série $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$ est divergente pour $x > R$ et convergente pour $x < R$. Naturellement il faut entendre, quand R est infini, que la série est toujours convergente ; quand R est nul, qu'elle n'est convergente pour aucune valeur positive de x.

La détermination précise du nombre R que l'on vient de donner est due à Cauchy [1] ; mais son existence apparaît immédiatement en observant que si la série (a) est convergente pour une valeur de x, elle reste convergente quand on remplace x par un nombre (positif) plus petit, puisque chaque terme est remplacé par un terme plus petit ; de même si elle est divergente pour une valeur de x elle est divergente pour les valeurs plus grandes ; dès lors si l'on écarte le cas où la série n'est convergente pour aucune valeur positive de x, et celui où elle est convergente pour toutes les valeurs positives de x, il faut qu'il y ait des valeurs positives de x pour lesquelles elle est convergente, et des valeurs pour lesquelles elle est divergente : soit (E) l'ensemble des premières valeurs, (E′) l'ensemble des secondes. Un nombre positif quelconque appartient nécessairement à l'un ou à l'autre ensemble, chaque nombre du premier ensemble est plus petit que chaque nombre du second. Ces deux ensembles définissent un nombre R qui est la borne supérieure de (E), la borne inférieure de (E′). Tout nombre positif x, plus petit que R appartient au premier

[1] Elle est restée longtemps oubliée ; M. Hadamard, qui l'a retrouvée de son côté, en a montré l'importance et en a tiré de nombreuses conséquences.

ensemble, tout nombre plus grand que R, appartient au second. Pour $x = R$, la série est convergente ou divergente suivant que R appartient au premier ou au second ensemble.

129. — Ce raisonnement toutefois ne met pas en évidence, comme le précédent, ce fait que pour une valeur de x supérieure à R, il y a dans la série (a) une infinité de termes plus grands que 1. Ce point, dont on va voir l'importance, résulte au contraire d'une remarque très simple due à Abel, qui a montré le premier le caractère des séries qui nous occupent : voici cette remarque. Admettons qu'il y ait un nombre positif X pour lequel l'ensemble des nombres $a_n X^n$ soit borné en haut ; la série (a) est convergente pour toute valeur positive de x moindre que X ; en effet pour une telle valeur de x, la série

$$1 + \frac{x}{X} + \left(\frac{x}{X}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x}{X}\right)^n + \dots,$$

en convergente ; elle reste convergente, si on multiplie le $(n+1)^e$ terme par le nombre positif $a_n X^n$ qui, par hypothèse, est moindre qu'un nombre positif fixe ; or, on reproduit ainsi la série (a).

Le nombre R apparaît alors comme la borne supérieure de l'ensemble des nombres positifs X tels que l'ensemble des nombres $a_n X^n$ soit borné en haut. Pour une valeur de X supérieure à R, l'ensemble des nombres $a_n X^n$ n'est pas borné en haut : il y a donc une infinité de termes de la série (a) qui dépassent tel nombre positif que l'on voudra.

Si, maintenant, on ne suppose plus que les nombres $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ soient positifs, non plus que x, et si l'on désigne par R le nombre, dont on vient de prouver l'existence, pour la série à termes positifs (ou nuls)

$$a'_0 + a'_1 x' + \dots + a'_n x'^n + \dots,$$

où $a'_0, a'_1, \dots, a'_n, \dots, x'$ sous les valeurs absolues de $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots, x$, on voit de suite que, pour les nombres x tels que l'on ait $|x| < R$, la série

$$(a) \qquad a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$$

est absolument convergente, qu'elle n'est pas convergente (absolument ou non) pour les valeurs de x, telles que l'on ait $|x| > R$,

puisqu'il y a alors dans la série (a), une infinité de termes plus grands que 1 en valeur absolue. Pour $x = R$ la série (a) peut être divergente ou convergente (absolument ou non).

130. — La comparaison d'une série à termes positifs.

$$(v) \qquad\qquad v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots,$$

dont on veut reconnaître la convergence ou la divergence à une autre série à termes positifs

$$(u) \qquad\qquad u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

dont on connaît le caractère, peut se faire en considérant le rapport $\frac{v_n}{u_n}$ de deux termes de même rang.

Supposons que ce rapport reste, à partir d'une certaine valeur de n, compris entre deux nombres positifs (non nuls) a et b $(a < b)$. On peut affirmer alors que les deux séries sont, en même temps, convergentes ou divergentes. Il suffit, pour s'en convaincre, de comparer la série (v) aux deux séries obtenues en multipliant tous les termes de la série (u) soit par a, soit par b ; les termes de la série (v), à partir d'un certain rang sont inférieurs aux termes de la série (u) multipliés par b ; si la série (u) est convergente, la série (v) l'est aussi. Dans ce cas le reste de la série (v) est inférieur au reste de la série (u), multiplié par b, pourvu qu'on s'arrête à un terme à partir duquel l'hypothèse relative au rapport se trouve vérifiée. Les termes de la série (v) sont supérieurs aux termes de la série (u), multipliés par a : si la série (u) est divergente, il en est de même de la série (v).

On peut encore affirmer la convergence de la série (v) quand la série (u) est convergente et que le rapport $\frac{v_n}{u_n}$, à partir d'un certain rang, reste inférieur à un nombre fixe, ou la divergence de la série (v) quand la série (u) est divergente, et que le rapport $\frac{v_n}{u_n}$ à partir d'un certain rang, reste supérieur à un nombre fixe, positif (non nul).

Ces remarques s'appliquent en particulier lorsque le rapport $\frac{v_n}{u_n}$

a une limite l pour n infini : si l en différent de zéro, et si on désigne par ε un nombre positif plus petit que l, on peut lui faire correspondre un nombre naturel p, à partir duquel le rapport $\frac{v_n}{u_n}$ reste compris entre les deux nombres positifs, non nuls, $l - \varepsilon$ et $l + \varepsilon$: dans ce cas les deux séries sont convergentes et divergentes en même temps ; si l'on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0,$$

on peut affirmer la convergence de la série (v), quand la série (u) est convergente : enfin si l'on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{v_n}{u_n} = +\infty,$$

on peut affirmer la divergence de la série (v) quand la série (u) est divergente.

Prenons par exemple pour la série (v) une série dans le n^e terme soit une fonction rationnelle $\varphi(n)$ de n. Ce n^e terme ne peut tendre vers 0, quand n croît indéfiniment que si le dénominateur de la fraction est de degré supérieur au numérateur : supposons que la différence des deux degrés soit p. On sait que l'on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{\varphi(n)}{n^p} = A,$$

en désignant par A le quotient des coefficients des termes du plus haut degré dans le numérateur et le dénominateur de $\varphi(n)$.

On conclut de là que la série dont le n^e terme est $\varphi(n)$, série dont les termes finissent par être tous du même signe, est convergente ou divergente en même temps que la série dont le n^e terme est n^{-p} ; elle converge si p est plus grand que 1, diverge si p est égal à 1.

On doit toutefois supposer que le numérateur de $\varphi(n)$ ne s'annule pour aucune valeur entière et positive de n.

En supposant que p soit plus grand que 1 et en désignant par α_1, ., α_2, ..., α_n, ... des nombres dont la valeur absolue reste inférieure à un nombre positif fixe, on voit que la série

$$\alpha_1\varphi(1) + \alpha_2\varphi(2) + \ldots + \alpha_n\varphi(n) + \ldots$$

est absolument convergente.

Il y a lieu de remarquer que, si les termes de la série (v) vont en décroissant, la série (v) ne peut être convergente que si nv_n a pour limite o, quand n croît indéfiniment ([1]). Pour le voir il reste à démontrer que la série (v) est divergente lorsque nv_n n'a pas de limite pour n infini. De la supposition que l'on n'a pas $\lim\limits_{n=\infty} nv_n = 0$, résulte l'existence d'un nombre positif a, tel que l'on ait $nv_n \geqq a$, pour une valeur convenablement choisie de n, plus grande que tel nombre positif p que l'on voudra (n° **53**).

Ainsi, partant d'un nombre naturel α tel que l'on ait $\alpha v_\alpha > a$, on peut en trouver un β plus grand que α et que tel autre nombre qu'on voudra, pour lequel on aura $\beta v_\beta > a$, puis un autre γ plus grand que β, et que tel autre nombre qu'on voudra, pour lequel on aura $\gamma v_\gamma > a$, etc. On ne sera jamais arrêté; or la somme des termes consécutifs de la série (v) qui commencera à v_α et dont le dernier serait $v_{\nu-1}$ est supérieure (n° **97**) à

$$(\beta - \alpha) v_\beta + (\gamma - \beta) v_\gamma + \ldots + (\nu - \mu) v_\nu$$

et par conséquent au produit par a de

$$\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{\mu}{\nu}\right);$$

or ce dernier nombre peut être supposé aussi grand qu'on le veut : si l'on suppose par exemple $\beta > 2\alpha, \gamma > 2\beta, \ldots, \nu > 2\mu$, chaque terme est plus grand que $\frac{1}{2}$, et il y a autant de termes qu'on veut.

Le fait que les deux séries à termes positifs

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} u_n, \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{u_n}{s_n},$$

où l'on suppose $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, étaient convergentes ou divergentes en même temps, a été établi au n° **126** ([2]). On peut

([1]) E. Borel. — *Leçons sur les fonctions entières*, p. 17.

([2]) La seconde série dans le n° **126**, était $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{u_n}{1+s_n}$; mais la modification

évidemment le rattacher aux propositions précédentes, lorsque la première série, que je désignerai sous le nom de série (u) est convergente ; il est clair en effet que le rapport du n^e terme de la seconde série au n^e terme de la série (u) a pour limite $\frac{1}{s}$, en désignant par s la somme de la série (u) ; la seconde série est donc convergente ; au reste, il suffirait de remarquer que les termes de la seconde série sont plus petits que les termes de la première divisés par u_1.

Dans le cas où la série (u) est divergente, la divergence de la seconde série apparait directement comme il suit : puisque les sommes s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, ... vont en augmentant, il est clair que la somme des p termes qui, dans la seconde série, suivent le n^e, à savoir

$$\frac{u_{n+1}}{s_{n+1}} + \frac{u_{n+2}}{s_{n+2}} + \ldots + \frac{u_{n+p}}{s_{n+p}}$$

est supérieure à

$$\frac{u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}}{s_{n+p}} = 1 - \frac{s_n}{s_{n+p}};$$

or, la première série étant divergente, on peut, lorsque l'on se donne n, choisir p assez grand pour que $\frac{s_n}{s_{n+p}}$ soit plus petit que tel nombre positif que l'on voudra, que $\frac{1}{2}$ par exemple ; on peut donc trouver dans la seconde série, après un terme quelconque, des termes dont la somme dépasse $\frac{1}{2}$, après le dernier de ces termes, des termes dont la somme dépasse $\frac{1}{2}$, etc...

Abel, à qui sont dues ces remarques si simples, a montré en outre, en supposant divergente la série (u), que la série

$$\frac{u_1}{s_1^{1+\alpha}} + \frac{u_2}{s_2^{1+\alpha}} + \ldots + \frac{u_n}{s_n^{1+\alpha}} + \ldots.$$

où α est nombre positif, est convergente.

est évidemment insignifiante, puisque le rapport $\frac{s_n}{1+s_n}$ de deux termes de même rang a une limite positive, soit que s_n tende vers une limite, soit que l'on ait $\lim_{n=\infty} s_n = \infty$.

Cette proposition résulte aisément, comme on va le voir, de l'inégalité

$$\frac{1}{(1-x)^m} > 1 + mx,$$

où m désigne un nombre positif quelconque et x un nombre positif plus petit que 1 : cette inégalité sera établie plus tard (nos **133**, **188**). Elle entraîne les suivantes

$$\frac{1}{(s_n - u_n)^\alpha} = \frac{1}{s_n^\alpha \left(1 - \frac{u_n}{s_n}\right)^\alpha} > \frac{1}{s_n^\alpha} + \frac{\alpha u_n}{s_n^{1+\alpha}},$$

$$\frac{u_n}{s_n^{1+\alpha}} < \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{s_{n-1}^\alpha} - \frac{1}{s_n^\alpha}\right);$$

d'où l'on conclut

$$\frac{u_1}{s_1^{1+\alpha}} + \frac{u_2}{s_2^{1+\alpha}} + \ldots + \frac{u_n}{s_n^{1+\alpha}} < \frac{1}{u_1^\alpha} + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{u_1^\alpha} - \frac{1}{s_n^\alpha}\right)$$
$$< \frac{1}{u_1^\alpha}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right);$$

et cette dernière inégalité met en évidence la convergence de la série proposée.

Si l'on supposait α négatif, il est clair que la série considérée serait divergente, puisque ses termes seraient plus grands que ceux de la série dont le n^e terme est $\frac{u_n}{s_n}$, série dont on sait qu'elle est divergente.

En appliquant ces résultats au cas où l'on aurait $u_n = 1$, on retrouve les propositions établies au n° **96**. En les appliquant au cas où l'on aurait $u_n = \frac{1}{n}$, on voit que la série dont le n^e terme est $\frac{1}{n s_n^{1+\alpha}}$, où l'on suppose

$$s_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

est convergente si α est positif, divergente si α est nul ou négatif; en partant de la série divergente donc le n^e terme est $\frac{1}{n s_n}$, on

pourra obtenir par le même procédé une série dont le n^e terme sera

$$\frac{1}{ns_n s_n'^{1+\alpha}},$$

où s_n' sera la somme des n premiers termes de la première série, et qui convergera si α est positif, qui divergera si α est négatif. Ce procédé peut être continué indéfiniment, et les séries successives auxquelles il donne naissance sont précieuses comme types de comparaison ; mais j'aurai plus tard l'occasion de mettre sous une forme plus simple les résultats auxquels il conduit.

131. — Revenons à la comparaison de la série à termes positifs

$$(v) \qquad v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

à la série, à termes aussi positifs

$$(u) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

et dont le caractère (de convergence ou de divergence) est supposé connu.

Si la série (u) est convergente et si l'on a, à partir d'un certain rang p,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leqq \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

la série (v) est aussi convergente. Si la série (u) est divergente et si l'on a, à partir d'un certain rang p,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \geqq \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

la série (v) est aussi divergente.

Ces propositions sont une conséquence immédiate de celles qu'on a établies au début du n° **130**, en effet, dans le premier cas, par exemple, on doit avoir, pour $n > p$,

$$\frac{v_p}{u_p} \geqq \frac{v_{p+1}}{u_{p+1}} \geqq \frac{v_{p+2}}{u_{p+2}} \geqq \ldots \geqq \frac{v_n}{u_n}$$

et l'inégalité $\frac{v_n}{u_n} \leqq \frac{v_p}{u_p}$, où le second membre est un nombre fixe,

suffit à prouver la convergence de la série (v) ; on voit aussi que le reste de cette série, quand on la limite au terme v_{p-1} est au plus égal à $\frac{v_p}{u_p} R_{p-1}$, en désignant par R_{p-1}, le reste de la série (u), limitée au terme u_{p-1}.

Le raisonnement est le même dans le second cas, si ce n'est qu'il n'y a pas lieu de parler du reste.

Si l'on prend pour la série (u) la série

$$a + a^2 + \ldots + a^n + \ldots,$$

où a est nombre positif, série convergente pour $a < 1$, divergente pour $a \geqq 1$, on obtient les conclusions suivantes.

Si pour $n \geqq p$ le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ reste constamment inférieur ou égal à un nombre fixe a, plus petit que 1, la série (v) est convergente ; son reste quand on la limite au terme v_n $(n \geqq p)$ est au plus égal à

$$\frac{v_{n+1}}{a^{n+1}} \frac{a^{n+1}}{1-a} = \frac{v_{n+1}}{1-a},$$

si, pour $n \geqq p$, le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ est constamment supérieur ou égal à 1, la série (v) est divergente. Cela est d'ailleurs évident, puisque, alors, les termes ne diminuent pas quand leur rang augmente.

Cette règle s'applique en particulier quand le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ admet, pour n infini, une limite l ; quelque petit que soit le nombre positif ε, ce rapport, pour des valeurs suffisamment grandes de n, sera toujours compris entre $l - \varepsilon$ et $l + \varepsilon$; si l est différent de 1, on prendra ε moindre que la valeur absolue de la différence $1 - l$.

Lorsque la limite est inférieure à 1, les inégalités

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} > l + \varepsilon < 1,$$

qui auront lieu à partir d'un certain rang, montrent que la série (v) est convergente. Si la limite est supérieure à 1, les inégalités

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} > l - \varepsilon > 1$$

prouvent que la série est divergente. Il y a doute si la limite en 1, sauf dans le cas où le rapport est constamment supérieur ou égal à 1, auquel cas la divergence est certaine.

Si l'on appliquait cette règle à la série

$$(a) \qquad a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

où l'on suppose que les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sont positifs, ainsi que le nombre x, on serait amené à considérer le rapport

$$\frac{a_{n-1} x^{n-1}}{a_n x^n} = \frac{a_{n-1}}{a_n} x;$$

supposons que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n} = h$$

on voit que la série (a) est convergente pour les valeurs de x qui sont positives et plus petites que h, divergentes pour les valeurs de x qui sont plus grandes que h ; ces résultats sont conformes à ceux que l'on a obtenus au n° **129** ; mais il faut remarquer que, ici, le raisonnement suppose l'existence d'une limite pour $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Comme la série (a) ne peut pas être à la fois convergente et divergente, pour une même valeur de x, il est clair que si les deux quantités $\sqrt[n]{a_n}$, $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ ont des limites, ces deux limites sont égales. Il n'est pas bien difficile d'ailleurs de montrer que l'existence de la seconde limite entraîne celle de la première.

132. — Considérons, comme exemples, les séries

$$(1) \qquad 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

$$(2) \quad 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} x^n + \ldots,$$

où, pour la seconde, m est un nombre quelconque, le rapport du $(n+1)^e$ terme au précédent est $\frac{x}{n}$ pour la première, $\frac{m-n+1}{n} x$

pour la seconde ; quel que soit x, $\frac{x}{n}$ a pour limite zéro quand n augmente indéfiniment ; le rapport de la valeur absolue d'un terme de la série (1) à la valeur absolue du terme précédent, a donc aussi pour limite zéro ; la série (1) est absolument convergente, quelle que soit la valeur de x. C'est ce que l'on a déjà vu au nº **95** où l'on a donné aussi l'expression du reste. Lorsque n augmente indéfiniment, le rapport des valeurs absolues de deux termes consécutifs de la série (2) a pour limite $|x|$ et par conséquent, lorsque x est compris entre -1 et $+1$, la série (2) est absolument convergente ; lorsque la valeur absolue de x est supérieure à un, la série est divergente, puisque les termes ne tendent pas vers zéro, sauf toutefois quand m est un nombre entier positif, car alors la série est limitée ; lorsque l'on a $x = \pm 1$, la série est divergente si $m+1$ est négatif ou nul, il y a doute si $m+1$ est positif.

Une règle que l'on va donner tout à l'heure montre que dans ce cas ($x = \pm 1$, $m+1 > 0$) la série est absolument convergente si m est positif, divergente si m est négatif et si x est égal à -1 ; enfin la règle du nº **137** permettra de reconnaître que dans le cas où l'on a $x = 1$, $0 > m > 1$, la série est convergente sans l'être absolument.

On verra plus tard que la somme de cette série, quand elle est convergente, est égale à $(1+x)^m$.

133. — En admettant cette dernière proposition, on voit que, si l'on remplace x par $-x$ et m par $-m$ dans l'égalité

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \ldots,$$

elle devient

$$(1-x)^{-m} = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m+1)}{1.2}x^2 + \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}x^3 + \ldots,$$

en supposant x et m positifs, tous les termes de la série qui figurent au second nombre sont positifs, il est clair que l'on a bien

$$\frac{1}{(1-x)^m} > 1 + mx,$$

quand m est positif et que x est compris entre o et 1, ainsi qu'on l'a dit au n° **131**. La même proposition fournit une autre relation du même genre, dont je vais avoir besoin : elle se rapporte au cas où x est très petit en valeur absolue.

Si on limite la série (2) au second terme, on voit que son reste sera de la forme Ax^2 en désignant par A la somme de la série

$$\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}x^2+\ldots,$$

convergente, comme la proposée, si l'on a $|x|<1$; en supposant $|x|<a<1$ et en désignant par μ la valeur absolue de m, il est clair que A sera moindre en valeur absolue que la somme B de la série

$$\frac{\mu(\mu+1)}{1.2}+\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)}{1.2.3}a+\frac{\mu(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{1.2.3.4}a^2+\ldots,$$

puisque, pour obtenir la série B, on a remplacé chaque terme de la série A par un terme positif, plus grand en valeur absolue. On peut donc poser

$$(1+x)^m=1+mx+Ax^2,$$

en étant certain que si x est moindre en valeur absolue que a, la quantité A, qui dépend de x, sera moindre en valeur absolue que B.

On peut encore écrire

$$(1+x)^m=1+\beta x,$$

en désignant par $\beta=m+Ax$, un nombre dont on sait qu'il est aussi voisin de m qu'on le veut, pourvu que x soit suffisamment petit en valeur absolue. C'est la relation que je voulais établir.

134. — On a vu que l'application à la série à termes positifs

$$(v)\qquad v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots.$$

du critère fourni par la limite du rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ laissait un doute quand cette limite était 1 et que le rapport finissait par être toujours inférieur à 1.

Il est alors naturel de comparer la série (v) à une autre série à termes positifs

$$(u) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots,$$

où la même circonstance se présente, et dont on sache si elle est convergente ou divergente.

Prenons, par exemple, pour la série (u) la série dont le n^e terme est $\frac{1}{n^r}$, en désignant par r un nombre positif. On a alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^r} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_n}{n}},$$

en désignant par α_n un nombre dont on sait, par le numéro précédent, qu'il est aussi voisin de r que l'on veut, pourvu que n soit assez grand.

En mettant le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ sous la forme analogue

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{1 + \frac{\beta_n}{n}},$$

on est conduit à la règle suivante.

Si, pour les valeurs de n suffisamment grandes β_n reste plus grand qu'un nombre h plus grand que 1, la série (v) est convergente, si au contraire, pour les valeurs de n suffisamment grandes β_n reste plus petit que 1, la série (v) est divergente.

Je me borne au premier cas. On choisira r compris entre 1 et h ; la série (u) est convergente ; puisque α_n est aussi voisin de r qu'on le veut, α_n, pour des valeurs suffisamment grandes de n, est compris aussi entre 1 et h, en sorte que l'on a $\beta_n > \alpha_n$ et par suite

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{u_{n+1}}{u_n};$$

la série (v) est convergente comme la série (u).

Cette règle est connue sous le nom de Raabe et Duhamel ; elle

s'applique en particulier lorsque ξ_n a, pour n infini, une limite différente de 1.

135. — Restant toujours dans le cas où l'on a pour les séries (u), (v),

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n=\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1,$$

en sorte qu'on puisse poser

$$(1) \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \varepsilon_n, \qquad \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \eta_n,$$

avec les conditions $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = \lim\limits_{n=\infty} \eta_n = 0$, je vais montrer que les deux séries (u), (v) sont convergentes ou divergentes en même temps, lorsque la série dont le n^e terme est $\varepsilon_n - \eta_n$ est absolument convergente.

En effet, les égalités (1) donnent

$$u_{n+1} = u_1 (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) \ldots (1 - \varepsilon_n),$$
$$v_{n-1} = v_1 (1 - \eta_1)(1 - \eta_2) \ldots (1 - \varepsilon_n),$$

d'où

$$\frac{v_{n-1}}{u_{n-1}} = \frac{v_1}{u_1} \left(1 + \frac{\varepsilon_1 - \eta_1}{1 - \varepsilon_1}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon_2 - \eta_2}{1 - \varepsilon_2}\right) \ldots \left(1 + \frac{\varepsilon_n - \eta_n}{1 - 2_n}\right).$$

La quantité $\frac{\varepsilon_n - \eta_n}{1 - \varepsilon_n}$ ayant 0 pour limite finit, à partir d'une certaine valeur de n, par devenir moindre que 1 en valeur absolue; rien n'empêche de supposer qu'il en est toujours ainsi, puisque, dans l'étude de la convergence d'une série, on peut faire commencer cette série au terme que l'on veut. Dès lors la théorie des produits infinis montre que le second membre, a pour n infini, une limite différente de 0, si la série $\sum \frac{\varepsilon_n - \eta_n}{1 - \varepsilon_n}$ est absolument convergente; le caractère de cette série est le même que celui de la série $\sum (\varepsilon_n - \eta_n)$ puisque le rapport de deux termes correspondants, dans les deux séries, a pour limite l'unité. Si la série $\sum |\varepsilon_n - \eta_n|$ est convergente, le rapport $\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}}$ a, pour n infini, une limite, différente

de o. Les deux séries (u), (v) sont en même temps convergentes ou divergentes.

Ceci posé, prenons comme tout à l'heure, pour la série (u), la série dont le terme général est n^{-r}; on aura alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-r} = 1 - \frac{r}{n} + \frac{A_n}{n^2},$$

A_n étant un nombre qui, comme on l'a vu au n° **133**, reste inférieur en valeur absolue à un nombre fixe. La série $\sum \frac{A_n}{n^2}$ est par conséquent absolument convergente, comme la série $\sum n^{-2}$. On est maintenant en mesure d'établir le théorème suivant :

Si l'on peut mettre, dans la série (v), le rapport d'un terme au précédent sous la forme

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{r}{n} + \rho_n$$

r étant un nombre fixe et ρ_n une quantité telle que la série $\sum |\rho_n|$ soit convergente, la série (v) est convergente si l'on a $r > 1$, divergente si l'on a $r \leqq 1$ [1].

En effet, il est clair que la série $\sum \left| \rho_n - \frac{A_n}{n^2} \right|$ est alors convergente : par conséquent les deux séries (u), (v) ont le même caractère.

C'est ce qui arrive en particulier si l'on peut poser $\rho_n = \frac{B_n}{n^s}$, s étant un nombre fixe plus grand que 1 et B_n un nombre qui reste en valeur absolue, pour toutes les valeurs de n, inférieur à un nombre positif fixe.

En vertu de l'hypothèse faite sur le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$, ce rapport finit nécessairement par être positif; tous les termes de la série (v) finissent par avoir le même signe, et il est inutile de spécifier que cette série est une série à termes positifs.

[1] Le lecteur pourra comparer cette règle à celle de RAABE : dans des cas assez larges, mais non toujours, les deux règles sont équivalentes. On peut appliquer le même mode de raisonnement, en employant comme terme de comparaison des séries plus lentement convergentes que la série $\sum n^{-1}$, par exemple la série dont le n^e terme est

$$u_n = \frac{1}{n \log^2 n}.$$

En vertu de la supposition relative au rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$, on a

$$v_p = v_1 \prod_{n=1}^{n=p} \left(1 - \frac{r}{n} + \rho_n\right) = v_1 \prod_{n=1}^{n=p} \left(1 - \frac{r}{n}\right) \times \prod_{n=1}^{n=p} \left(1 + \frac{\rho_n}{1 - \frac{r}{n}}\right);$$

le produit infini

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 + \frac{\rho_n}{1 - \frac{r}{n}}\right)$$

est absolument convergent, à cause de la convergence de la série $\sum |\rho_n|$, le produit

$$\prod_{n=1}^{n=p} \left(1 - \frac{r}{n}\right),$$

augmente indéfiniment avec p, reste égal à 1, ou tend vers 0, suivant que r est négatif, nul, ou positif : on voit que, p croissant indéfiniment, v_p croit indéfiniment, tend vers une limite différente de 0, ou tend vers 0 suivant que r est négatif, nul, ou positif.

La règle précédente s'applique en particulier dans le cas où le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ peut se mettre sous la forme d'une fraction rationnelle

$$\frac{n^p + A_1 n^{p-1} + A_2 n^{p-2} + \dots}{n^p + a_1 n^{p-1} + a_2 n^{p-2} + \dots},$$

où le degré p et les coefficients $A_1, A_2, \dots, a_1, a_2, \dots$, sont indépendants de n ; on voit de suite, en effectuant la division du numérateur par le dénominateur et en calculant deux termes au quotient, que l'on peut prendre $r = a_1 - A_1$ et que la série proposée est

qui, comme on le verra plus tard, est convergente ou divergente dans les mêmes conditions que la série $\sum n^{-r}$, ou encore des séries analogues. Celle que je viens de dire conduit à la règle suivante : si l'on peut poser

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{1}{n}\left(1 + \frac{r}{\log n}\right) + \rho_n,$$

le nombre r étant fixe et la série $\sum |\rho_n|$ convergente, la série (v) en convergente quand r est plus grand que 1, divergente quand r est égal ou inférieur à 1.

convergente si l'on a

$$A_1 - a_1 + 1 < 0,$$

divergente dans les autres cas. Cette règle est due à Gauss.

Appliquons la, comme Gauss l'a fait lui-même, à la série *hypergéométrique* :

$$1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{1.2\ldots n.\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n + \ldots$$

où α, β, γ désignent des nombres qui ne sont pas des entiers négatifs; le rapport du $(n+2)^e$ terme au $(n+1)^e$ est

$$\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}x$$

pour n infini, il a x pour limite ; on en conclut que la série proposée est absolument convergente lorsque l'on a $|x| < 1$; on désigne habituellement la somme de cette série par le symbole

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x).$$

Si l'on suppose maintenant $x = \pm 1$, l'application de la règle précédente conduit aux résultats que voici :

Suivant que le nombre $\alpha + \beta - \gamma - 1$ est positif, nul, ou négatif, les valeurs absolues des termes de la série augmentent indéfiniment, tendent vers une limite différente de 0, ou tendent vers 0. La série est absolument convergente si l'on a $\alpha + \beta - \gamma < 0$ et seulement dans ce cas. Si $\alpha + \beta - \gamma$ est positif mais plus petit que 1, la série ne peut être convergente si ses termes finissent par être toujours de même signe ; elle n'est donc pas convergente pour $x = 1$, puisque, alors, le rapport d'un terme au précédent, finit par être positif. Pour $x = -1$, les termes finissent par être alternativement positifs ou négatifs, d'autre part ils tendent vers 0 et finissent par décroître constamment, comme il est aisé de le voir : on verra au n° **137** que, dans ces conditions, la série est convergente.

Je me bornerai à remarquer sur la série $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, qui a été l'objet d'un grand nombre de beaux travaux, qu'elle se réduit à un polynome en x quand l'un des nombres α, β est un entier

négatif, et qu'elle se réduit à la série déja considérée

$$1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} x^n + \ldots,$$

lorsqu'on y suppose $\beta = \gamma = -m$, et qu'on y remplace x par $-x$.

136. — Prenons pour la série (u) qui sert de terme de comparaison, la série

$$(u) \qquad 1 + \frac{\beta_1}{1+\beta_1} + \ldots + \frac{\beta_n}{(1+\beta_1)(1+\beta_2)\ldots(1+\beta_n)} + \ldots,$$

où l'on suppose β_n positif, et dont on a démontré au n° **126** qu'elle était toujours convergente. La série à termes positifs

$$(v) \qquad v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

sera convergente si l'on a, à partir d'un certain rang,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leqq \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n(1+\beta_{n+1})}$$

ou, en remplaçant pour plus de simplicité β_n par $\frac{1}{\lambda_n}$ et en supposant $\lambda_n > 0$, si l'on a

$$(1) \qquad \frac{v_{n+1}}{v_n} \leqq \frac{\lambda_n}{1+\lambda_{n+1}};$$

ainsi, il suffit pour pouvoir affirmer la convergence de la série à termes positifs (v) de savoir qu'il existe une suite de nombres positifs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ tels que l'inégalité (1) soit vérifiée pour toutes les valeurs de n qui dépassent une certaine limite.

La démonstration directe de cette règle [1] est immédiate, car en supposant l'inégalité précédente vraie à partir de $n = 1$, en l'écrivant sous la forme

$$\lambda_n v_n - \lambda_{n+1} v_{n+1} \geqq v_{n+1},$$

en y remplaçant n par 1, 2, 3... et en ajoutant, on trouve de suite

$$v_2 + v_3 + \ldots + v_{n+1} \leqq \lambda_1 v_1 - \lambda_{n+1} v_{n+1} < \lambda_1 v_1.$$

[1] Elle est due à KUMMER : elle a été complétée par M. JENSEN.

Réciproquement, si la série (v) est convergente, si l'on désigne par s_n la somme de ses n premiers termes, et par A un nombre supérieur ou égal à sa somme, il suffira de prendre (n° **126**)

$$\lambda_n = \frac{A - s_n}{v_n},$$

pour avoir

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\lambda_n}{1 + \lambda_{n+1}},$$

car cette égalité se réduit à $s_{n+1} - s_n = v_{n+1}$; au reste, on reconnait sans peine que l'on aura, d'une façon plus générale,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} < \frac{\lambda_n}{1 + \lambda_{n+1}},$$

si l'on prend

$$\lambda_n = (1 + \varepsilon_n)\frac{A - s_n}{v_n},$$

en désignant par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots$ une suite de nombres positifs décroissants, d'ailleurs quelconques. En supposant A égal à la somme de la série proposée, on voit (n° **126**) que la série dont le n^e terme est $\frac{1}{\lambda_n}$ est divergente.

L'existence des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ est ainsi une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la série (v).

En prenant tous les λ égaux entre eux, on voit que la série (v) est convergente si l'on peut déterminer un nombre positif λ tel que l'on ait, à partir d'un certain rang

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leqq \frac{\lambda}{1 + \lambda},$$

c'est la règle du n° **131**. Si l'on prend $\lambda_n = \frac{n}{\lambda}$, on voit que la série (v) est convergente si l'on peut déterminer un nombre positif λ tel que l'on ait, à partir d'un certain rang

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} \leqq \frac{1}{1 + \frac{1 + \lambda}{n}};$$

c'est la règle de Raabe, etc.

Il est clair que si la série formée avec les inverses des nombres positifs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ est divergente et si l'on a à partir d'un certain rang

$$(2) \qquad \frac{v_{n+1}}{v_n} \geqq \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}},$$

la série (v) est divergente. Réciproquement si l'on se donne une série divergente (v) à termes positifs, on peut trouver une suite de nombres positifs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ qui vérifient cette inégalité, et dont les inverses forment une série divergente :

Il suffira de prendre $\lambda_n = \frac{s_n}{v_n}$, en désignant par s_n la somme des n premiers termes de la série (v). En prenant, par exemple $\lambda_n = n$, on obtiendra la règle de Raabe, relative aux séries divergentes.

137. — Relativement aux séries qui sont convergentes sans l'être absolument, je me bornerai à établir quelques propositions, dont la première concerne les séries à termes alternativement positifs et négatifs.

Une série à termes alternativement positifs et négatifs est convergente si la valeur absolue de chaque terme est plus petite que la valeur absolue des termes précédents et si, en outre, les termes décroissent indéfiniment en valeur absolue quand leur rang s'éloigne indéfiniment.

Cette proposition repose sur le lemme que voici :

Si $a, b, c, \ldots, j, k, l$ sont des nombres positifs rangés par ordre de grandeur décroissante, la quantité

$$a - b + c - \ldots \pm j \mp k \pm l,$$

où les signes vont en alternant, est positive : on peut en effet l'écrire sous l'une ou l'autre des deux formes

$$(a - b) + (c - d) + \ldots + (k - l),$$
$$(a - b) + (c - d) + \ldots + (j - k) + (l),$$

suivant que le nombre des quantités $a, \ldots, l$ est pair ou impair.

Soit maintenant

$$(U) \qquad u_1 - u_2 + u_3 + \ldots + (-1)^{n-1} u_n - \ldots,$$

la série proposée, où tous les nombres u sont positifs et où l'on suppose [1]

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots,$$
$$\lim_{n=\infty} u_n = 0.$$

Désignons par s_n la somme des n premiers termes $u_1 - u_2 + \ldots \pm u_n$.

Le lemme précédent donne immédiatement les inégalités

$$s_n > 0, \qquad s_{2p+1} > s_{2q},$$
$$s_{2q} > s_{2p}, \qquad s_{2q+1} < s_{2p+1}.$$

Les deux premières ont lieu quels que soient les nombres n, p, q; les deux dernières supposent $q > p$: il suffit, pour vérifier ces inégalités, de former les différences $s_{2p+1} - s_{2q}$, (ou $s_{2q} - s_{2p+1}$) $s_{2q} - s_{2p}$, $s_{2q+1} - s_{2p+1}$. Les sommes à indices pairs

$$s_2, \quad s_4, \quad s_6, \quad \ldots, \quad s_{2p}, \quad \ldots$$

vont en croissant; elles restent inférieures à une somme quelconque d'indice impair s_{2q+1}; elles tendent donc, lorsque leur indice augmente indéfiniment, vers une limite A, pour laquelle on a, quels que soient p et q,

$$s_{2p} < A < s_{2q+1};$$

les sommes à indices impairs

$$s_1, \quad s_2, \quad s_3, \quad \ldots, \quad s_{2p+1},$$

vont en décroissant et restent supérieures à une somme quelconque d'indice pair s_{2q}; elles tendent donc vers une limite B, pour laquelle on a, quels que soient p et q,

$$s_{2p+1} > B > s_{2q}.$$

La condition $\lim_{n=\infty} u_n = 0$, qui n'est pas encore intervenue, conduit à la conclusion $A = B$; en effet ces deux nombres sont

[1] Les conclusions essentielles subsistent quand on ne suppose pas que le signe $>$ exclut l'égalité.

compris entre s_{2p} et s_{2p+1}, dont la différence u_{2p+1} peut être supposée aussi petite qu'on le veut.

Ainsi la série (U) est convergente : sa somme est plus grande qu'une somme quelconque s_{2p} à indice pair, plus petite qu'une somme quelconque s_{2p+1} à indice impair. En prenant pour la somme de la série la somme des n premiers termes, on commet une erreur en plus ou en moins, selon que le premier terme négligé est négatif ou positif et qui est moindre en valeur absolue que ce premier terme négligé, puisque la somme de la série est comprise entre la somme des n premiers et celle des $n+1$ premiers termes.

On aurait pu aussi établir la convergence de la série U en appliquant le caractère général du n° **94** ; la somme des m termes qui suivent le n^e est en effet

$$(-1)^n(u_{n+1} - u_{n+2} + \dots \pm u_{n+m});$$

la quantité entre parenthèses est positive, en vertu du lemme, elle est moindre que u_{n+1}, puisqu'on peut l'écrire

$$u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3} + \dots \mp u_{n+m})$$

et que, dans cette dernière expression, la quantité entre parenthèses est positive en vertu du même lemme ; la valeur absolue de la somme des m termes est donc moindre que u_{n+1}, et cela quel que soit m ; comme on peut, quel que soit le nombre positif ε, prendre n assez grand pour que l'on ait

$$u_{n+1} < \varepsilon,$$

la convergence est démontrée.

Par exemple la série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

est convergente sans l'être absolument. C'est une de ces séries dont la somme dépend de l'ordre dans lequel les termes sont écrits.

Voici un exemple de ce fait dont la raison a été donnée au n° **116**. Si l'on pose

$$s'_{2n-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1},$$

$$s''_{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n},$$

on établira sans peine l'identité

$$s'_{2n-1} - s''_{4n} = \frac{1}{2}(s'_{2n-1} - s''_{2n}),$$

en faisant croître n indéfiniment, on voit que le premier membre a pour limite la moitié de la somme de la série proposée ; c'est dire que cette somme est double de la somme de la série suivante, dont la convergence s'établit sans peine,

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \dots$$

Il est clair qu'une série appartenant au type qu'on a défini dans ce paragraphe peut être absolument convergente, telle serait la série

$$\frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \frac{1}{1.2.3.4.5} + \dots,$$

que l'on obtient en faisant $x = -1$ dans la série déjà signalée

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

La règle qu'on vient d'établir a été invoquée d'avance aux n^{os} **132**, **135**.

138. — D'autres propositions, d'une nature un peu plus cachée, se déduisent d'un lemme dû à Abel ([1]), et que j'énoncerai après avoir fait la remarque presque évidente que voici :

Soit

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n$$

une fonction linéaire des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, dans laquelle les coefficients $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont positifs ou nuls ; si l'on considère deux systèmes de valeurs des variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ d'une part, $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ de l'autre, tels que l'on ait $x'_i \geqq x$ pour les valeurs $1, 2, \dots, n$ de l'indice i, on a

$$A_1 x'_1 + A_2 x'_2 + \dots + A_n x'_n \geqq A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n ;$$

([1]) Recherches sur la série $1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1.2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^3 + \dots$ (*Œuvres*, 2e édit., p. 222).

en effet la différence entre les deux membres, à savoir

$$A_1(x'_1 - x_1) + A_2(x'_2 - x_2) + \ldots + A_n(x'_n - x_n),$$

est évidemment positive ou nulle.

Voici maintenant en quoi consiste le lemme d'Abel : Soient $v_1, v_2, \ldots, v_n$ des nombres positifs ou négatifs, a un nombre au plus égal au plus petit, A un nombre au moins égal au plus grand des nombres

$$s_1 = v_1, \quad s_2 = v_1 + v_2, \quad \ldots, \quad s_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n,$$

soient enfin $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, n nombres positifs rangés par ordre de grandeur décroissante, on aura

$$\varepsilon_1 a \leqq \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \ldots + \varepsilon_n v_n \leqq \varepsilon_1 A;$$

en effet la quantité intermédiaire peut s'écrire

$$\begin{aligned}&\varepsilon_1 s_1 + \varepsilon_2 (s_2 - s_1) + \ldots + \varepsilon_n (s_n - s_{n-1})\\ &\quad = s_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + s_2(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \ldots + s_{n-1}(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) + s_n \varepsilon_n;\end{aligned}$$

les coefficients $\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \ldots, \varepsilon_n$ étant positifs, on ne peut que diminuer le second membre de l'égalité précédente en y remplaçant $s_1, s_2, \ldots, s_n$ par a, on ne peut que l'augmenter en y remplaçant les mêmes quantités par A ; or on trouve ainsi $\varepsilon_1 a$ d'une part, $\varepsilon_1 A$ de l'autre; la proposition est donc démontrée.

Il résulte de là que si on désigne par K un nombre égal ou supérieur à la plus grande des valeurs absolues des nombres $s_1, s_2, \ldots, s_n$, on aura

$$-\varepsilon_1 K \leqq \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \ldots + \varepsilon_n v_n \leqq \varepsilon_1 K,$$

ou, si l'on veut,

$$|\varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \ldots + \varepsilon_n v_n| \leqq \varepsilon_1 K.$$

139. — Voici maintenant deux conséquences de ce lemme [1] :

I. Soit

$$(v) \qquad v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

[1] Voir le Mémoire de M. DARBOUX sur les fonctions discontinues, Annales de l'École normale, 2e série, t. IV, p. 87.

une série convergente, soit

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_n, \quad \ldots$$

une suite infinie de nombres positifs tels que chacun soit inférieur ou égal à celui qui le précède, la série

$$(v') \qquad \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \ldots + \varepsilon_n v_n + \ldots$$

est convergente.

En effet, à cause de la convergence de la série (v), à chaque nombre positif α correspond un entier positif n tel que l'on ait, quel que soit p,

$$|v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots + v_{n+p}| < \alpha,$$

et, par suite, à cause du lemme,

$$|\varepsilon_{n+1} v_{n+1} + \varepsilon_{n+2} v_{n+2} + \ldots + \varepsilon_{n+p} v_{n+p}| < \alpha\varepsilon_{n+1} < \alpha\varepsilon_1;$$

comme α est arbitraire, la convergence de la série (v') est démontrée.

On voit, par exemple, en conservant aux ε la signification précédente, que la série

$$\frac{\varepsilon_1}{1} - \frac{\varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_3}{3} - \ldots \pm \frac{\varepsilon_n}{n} \mp \ldots$$

est convergente.

II. Soit

$$(v) \qquad v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots,$$

une série convergente ou divergente, mais dans laquelle la somme des n premiers termes reste toujours, quel que soit n, inférieure en valeur absolue au nombre positif a, soit en outre

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \ldots, \quad \varepsilon_n, \ldots$$

une suite infinie de nombres positifs tels que chacun d'eux soit égal ou inférieur à celui qui le précède, tels en outre que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0,$$

la série

$$(V') \qquad \varepsilon_1 v_1 + \varepsilon_2 v_2 + \ldots + \varepsilon_n v_n + \ldots$$

est convergente.

On a en effet, quels que soit n et p,

$$|v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots + v_{n+p}| < 2a$$

et, en vertu du lemme,

$$|\varepsilon_{n+1} v_{n+1} + \varepsilon_{n+2} v_{n+2} + \ldots + \varepsilon_{n+p} v_{n+p}| < 2\varepsilon_{n+1} a;$$

or, à cause de la supposition $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$, on peut supposer n assez grand pour que $2\varepsilon_{n+1} a$ soit plus petit que tel nombre positif que l'on voudra. La convergence de la série (V') est donc démontrée.

Le théorème du n° **137** n'est qu'un cas particulier de celui-ci ; il suffit pour s'en convaincre de remplacer les quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, par les quantités $u_1, u_2, \ldots$ et de prendre pour la série (v) la série divergente

$$+1 - 1 + 1 - 1 + \ldots,$$

dans laquelle la somme des n premiers termes est 0 ou 1.

Considérons encore, en attribuant toujours le même sens aux nombres $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ la série

$$\varepsilon_0 \cos a + \varepsilon_1 \cos(a + x) + \ldots + \varepsilon_n \cos(a + nx) + \ldots,$$

où a et x sont des nombres quelconques, dont le second, toutefois, n'est pas un multiple de π. La convergence de cette série résulte de la formule

$$\cos a + \cos(a + x) + \ldots + \cos(a + nx) = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \cos\left(a + \frac{nx}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2}},$$

et de ce que le second membre reste, en valeur absolue, moindre que

$$\frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}.$$

V. — FRACTIONS CONTINUES

140. — On a étudié, dans le Chapitre premier, les *fractions continues* de la forme

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}},$$

où a_0, a_1, a_2, ... étaient des nombres entiers positifs, à partir de a_1. Rien n'empêche de considérer des expressions analogues, où la suite des quantités a_0, a_1, ..., a_n, ... est quelconque. Je me bornerai toutefois, sur les expressions de cette nature, à des remarques très élémentaires.

Les formules du n° **34**, en particulier, ont été établies sans faire aucune hypothèse sur les quantités a_0, a_1, ..., a_n :

Posons comme alors

$$P_0 = a_0, \qquad P_1 = a_0 a_1 + 1, \qquad P_n = P_{n-1} a_n + P_{n-2},$$
$$Q_0 = 1, \qquad Q_1 = a_1, \qquad Q_n = Q_{n-1} a_n + Q_{n-2}.$$

On aura

$$P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = (-1)^{n-1};$$

La n^e *réduite*, c'est-à-dire la valeur de la fraction continue limitée à a_n sera $\frac{P_n}{Q_n}$ et l'on aura

$$\frac{P_n}{Q_n} = a_0 + \frac{1}{Q_0 Q_1} - \frac{1}{Q_1 Q_2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{Q_{n-1} Q_n},$$

en sorte que, si l'on écarte le cas où l'une des quantités Q_n serait nulle, la question de savoir si la quantité $\frac{P_n}{Q_n}$ tend vers une limite revient à reconnaître la convergence ou la divergence de la série

$$a_0 + \frac{1}{Q_0 Q_1} - \frac{1}{Q_1 Q_2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{Q_{n-1} Q_n} + \ldots,$$

qu'il est assez naturel d'appeler série équivalente à la fraction continue illimitée.

On dira que cette fraction continue est convergente ou divergente suivant que la série équivalente est convergente ou divergente.

141. — Il est bien aisé de voir que si la série $\sum a_n$ est absolument convergente, la série équivalente à la fraction continue illimitée est divergente. On va voir en effet que, dans ces conditions, Q_{2n} et Q_{2n+1} ont des limites pour n infini.

Supposons d'abord que les quantités a_1, a_2, ..., a_n, ... soient toutes positives; il en sera évidemment de même des quantités Q_0, Q_1, ... Q_n, ... : or en se représentant Q_n sous la forme d'un polynome en a_1, a_2, ..., a_n, on voit de suite que l'on a

$$Q_n < \prod_{r=1}^{r=n} (1 + a_r);$$

si la série $\sum a_n$ est convergente, il en est de même du produit infini $\prod (1 + a_n)$; on voit déjà que Q_n reste inférieur à un nombre positif fixe.

D'ailleurs l'égalité $Q_n = Q_{n-1} a_n + Q_{n-2}$, montre que l'on a $Q_n > Q_{n-2}$ et, par suite

$$(1) \qquad Q_0 < Q_2 < Q_4 < \ldots, \qquad Q_1 < Q_3 < \ldots Q_5 < \ldots;$$

Q_{2n}, d'une part et Q_{2n+1} de l'autre, ont donc des limites pour n infini. Ces limites sont, en général, différentes, mais je ne m'arrête pas sur ce point.

Si les quantités a_1, a_2, ..., a_n, ... ne sont pas toutes positives, soit en général $a'_n = |a_n|$ et désignons par P'_n, Q'_n les quantités formées avec a', a'_1, a'_2, ... comme P_n, Q_n sont formés avec $a_0, a_1, a_2, \ldots$: Q_n considéré comme un polynome en a_0, a_1, a_2, ... est une somme de monomes ayant tous des coefficients égaux à 1; d'ailleurs l'égalité $Q_{n+2} = Q_{n+1} a_{n+1} + Q_n$ montre que tous les monomes qui figurent dans Q_n figurent dans Q_{n+2}, par conséquent dans Q_{n+4}, ... dans Q_{n+2p} : si l'on fait la différence

$Q_{n+2p} - Q_n$, il ne restera encore qu'une somme de monomes, dont la valeur absolue ne pourra qu'augmenter quand on remplacera les variables a_0, a_1, a_2, ... par leurs valeurs absolues ; on aura donc

$$|Q_{n+2p} - Q_n| < Q'_{n+2p} - Q'_n$$

On peut prendre n assez grand pour que le second membre soit aussi petit qu'on le veut, quel que soit p. Il résulte de là que Q_n tend vers une limite quand n augmente indéfiniment par valeurs paires, ou bien par valeurs impaires (n° **56**), ici encore ces limites sont différentes. Quoi qu'il en soit, la divergence de la série équivalente à la fraction continue est assurée.

Si les quantités a_1, a_2, ..., a_n, ... sont toutes positives, et si la série $\sum a_n$ est divergente, la série (1) et la fraction continue convergent.

Dans ce cas les quantités Q_0, Q_1, Q_2, ... sont positives et vérifient les inégalités (1).

La série équivalente à la fraction continue est alternée, et il suffit pour prouver sa convergence, de montrer que les valeurs absolues de ses termes vont en diminuant, c'est-à-dire de prouver que l'on a

$$\frac{1}{Q_n Q_{n-1}} < \frac{1}{Q_{n-1} Q_{n-2}},$$

ou $Q_n > Q_{n-2}$, et que le n^e terme a pour limite o (n° **137**). Les inégalités (1) montrent que les quantités Q_{2n} d'une part, les quantités Q_{2n-1} de l'autre augmentent indéfiniment ou tendent vers une limite ; mais il ne peut pas arriver que Q_{2n} et Q_{2n+1} tendent à la fois vers une limite : en effet, la série $\sum a_n$ étant divergente, il en est de même de l'une au moins des deux séries

$$a_1 + a_3 + a_5 + \dots,$$
$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots,$$

de la seconde par exemple. Or les relations

$$\begin{aligned} Q_{2n} - Q_0 &= (Q_2 - Q_0) + (Q_4 - Q_2) + \dots + (Q_{2n} - Q_{2n-2}) \\ &= a_2 Q_1 + a_4 Q_3 + \dots + a_{2n} Q_{2n-1} \\ &> Q_1 (a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}) \end{aligned}$$

montrent, puisque dans le dernier membre, le coefficient de Q_1 peut être supposé aussi grand qu'on le veut, que Q_{2n} ne peut tendre vers une limite. Si même Q_{2n+1} avait une limite pour n infini, comme cette limite ne pourrait être nulle, on n'en aurait pas moins

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{Q_{2n} Q_{2n+1}} = 0,$$

et cela suffit pour la convergence de la série (1).

Ainsi, dans le cas où $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sont tous positifs ; la divergence de la série $\sum a_n$ est une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la fraction continue.

142. — On peut considérer, d'une façon plus générale, les fractions continues telles que

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ddots + \cfrac{b_n}{a_n + \ddots}}},$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, d'une part, $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, d'autre part, forment deux suites quelconques.

Je me bornerai, pour ces fractions continues, à quelques remarques qui ne touchent guère que la forme.

En conservant le nom de réduite à la fraction continue limitée au terme $\frac{b_n}{a_n}$, et en désignant cette fraction par $\frac{\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{Q}_n}$, on peut poser

$$\mathfrak{P}_0 = a_0, \quad \mathfrak{P}_1 = a_0 a_1 + b_1, \quad \mathfrak{P}_n = \mathfrak{P}_{n-1} a_n + \mathfrak{P}_{n-2} b_n,$$
$$\mathfrak{Q}_0 = 1, \quad \mathfrak{Q}_1 = a_1, \quad \mathfrak{Q}_n = \mathfrak{Q}_{n-1} a_n + \mathfrak{Q}_{n-2} b_n.$$

$\mathfrak{P}_n$, $\mathfrak{Q}_n$ peuvent être regardés comme des polynomes formés avec les variables $a_0, a_1, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$. $\mathfrak{P}_n$ et $\mathfrak{Q}_n$ ont un sens quelles que soient les valeurs numériques attribuées à ces variables, en sorte que la fraction $\frac{\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{Q}_n}$ a un sens, pourvu que $\mathfrak{Q}_n$ ne soit pas nul. (Il n'en serait pas de même de la n^e réduite, définie comme une fraction continue limitée, si a_n était nul).

Si l'on désigne par $\mathfrak{P}_{n,r}$, $\mathfrak{Q}_{n,r}$ les polynomes formés au moyen des variables

$$a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+r}; b_{n+1}, \ldots, b_{n+r},$$

comme les polynomes $\mathcal{P}_r$, $\mathcal{Q}_r$ sont formés au moyen des variables $a_0, a_1, \ldots, a_r$ et $b_0, b_1, \ldots, b_r$, on a

$$\mathcal{P}_{n+r} = \mathcal{P}_{n-1}\mathcal{P}_{n,r} + \mathcal{P}_{n-2}\mathcal{Q}_{n,r}b_n,$$
$$\mathcal{Q}_{n+r} = \mathcal{Q}_{n-1}\mathcal{P}_{n,r} + \mathcal{Q}_{n-2}\mathcal{Q}_{n,r}b_n.$$

La fraction continue illimitée est dite convergente ou divergente suivant que $\dfrac{\mathcal{P}_n}{\mathcal{Q}_n}$ a, ou non, une limite pour n infini.

Les dernières relations montrent que si b_n est nul, toutes les réduites sont égales, à partir de la $(n-1)^e$; c'est d'ailleurs ce qui apparait sur la fraction continue illimitée, qui dans ce cas doit être regardée comme limitée : j'exclurai ce cas dans ce qui suit.

On a, quel que soit le nombre naturel n,

$$\mathcal{P}_n\mathcal{Q}_{n-1} - \mathcal{P}_{n-1}\mathcal{Q}_n = (-1)^{n-1}b_1b_2\ldots b_n;$$

le premier membre n'est jamais nul, puisqu'on suppose qu'aucun des nombres b_n n'est nul.

On a aussi, en excluant le cas où quelqu'une des quantités $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \ldots$ serait nulle,

$$\frac{\mathcal{P}_n}{\mathcal{Q}_n} = a_0 + \frac{b_1}{\mathcal{Q}_0\mathcal{Q}_1} - \frac{b_1b_2}{\mathcal{Q}_1\mathcal{Q}_2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{b_1b_2\ldots b_n}{\mathcal{Q}_{n-1}\mathcal{Q}_n},$$

143. — La fraction continue est convergente ou divergente suivant que la série

$$a_0 + \frac{b_1}{\mathcal{Q}_0\mathcal{Q}_1} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{b_1b_2\ldots b_n}{\mathcal{Q}_{n-1}\mathcal{Q}_n} + \ldots$$

est convergente ou divergente. C'est maintenant cette série qu'il convient d'appeler série équivalente à la fraction continue : sa somme, si elle est convergente, est la valeur de la fraction continue illimitée.

L'égalité

$$\frac{\mathcal{P}_{n+r}}{\mathcal{Q}_{n+r}} = \frac{\mathcal{P}_{n-1}\mathcal{P}_{n,r} + \mathcal{P}_{n-2}\mathcal{Q}_{n,r}b_n}{\mathcal{Q}_{n-1}\mathcal{P}_{n,r} + \mathcal{Q}_{n-2}\mathcal{Q}_{n,r}b_n},$$

lorsqu'on y regarde n comme fixe et qu'on fait grandir r indéfini-

ment, montre que, si $\frac{\mathfrak{P}_{n,r}}{\mathfrak{Q}_{n,r}}$ admet, pour r infini, une limite A_n, la fraction $\frac{\mathfrak{P}_{n+r}}{\mathfrak{Q}_{n+r}}$ admet, pour r infini, la limite

$$\frac{\mathfrak{P}_{n-1}A_n + \mathfrak{P}_{n-2}b_n}{\mathfrak{Q}_{n-1}A_n + \mathfrak{Q}_{n-2}b_n};$$

On doit toutefois exclure le cas où le dénominateur de cette fraction serait nul, cas auquel on aurait

$$\lim_{r=\infty} \left| \frac{\mathfrak{P}_{n+r}}{\mathfrak{Q}_{n+r}} \right| = +\infty,$$

Réciproquement, la relation entre $\frac{\mathfrak{P}_{n+r}}{\mathfrak{Q}_{n+r}}$ et $\frac{\mathfrak{P}_{n,r}}{\mathfrak{Q}_{n,r}}$ pouvant être résolue par rapport à cette dernière quantité, on voit que, si la fraction continue est convergente, la quantité $\frac{\mathfrak{P}_{n,r}}{\mathfrak{Q}_{n,r}}$ a une limite pour r infini, sauf le cas où l'on aurait

$$A\mathfrak{Q}_{n-1} - \mathfrak{P}_{n-1} = 0,$$

en désignant par A la limite, pour r infini, de $\frac{\mathfrak{P}_{n+r}}{\mathfrak{Q}_{n+r}}$.

144. — Lorsque les nombres $b_1, b_2, \ldots$ sont tous égaux à ± 1 et que les nombres $a_1, a_2, \ldots$ sont tous, en valeur absolue, supérieurs ou égaux à 2, la fraction continue est convergente [1].

Posons en effet

$$|a_n| = 2 + \alpha_n, \quad |\mathfrak{Q}_n| = \mathfrak{Q}'_n;$$

[1] M. Pringsheim, dans un Mémoire sur la convergence des fractions continues (*Sitzungsberichte* de l'Académie des Sciences de Munich, t. XXVIII, p. 205), donne pour le même cas $|b_n| = 1$, une règle un peu plus large. Il suffit, pour que la fraction soit convergente, que l'on ait, pour toutes les valeurs de l'indice n,

$$\left|\frac{1}{a_{2n-1}}\right| + \left|\frac{1}{a_{2n}}\right| \leqq 1.$$

Au reste, divers résultats du présent paragraphe sur les fractions continues, en particulier la proposition du n° **145**, sont tirés du Mémoire de M. Pringsheim.

α_n sera un nombre positif ou nul ; la relation $\mathfrak{Q}_n = a_n\mathfrak{Q}_{n-1} \pm \mathfrak{Q}_{n-2}$ entraîne l'inégalité

$$\mathfrak{Q}'_n \geqq (2 + \alpha_n)\,\mathfrak{Q}'_{n-1} - \mathfrak{Q}'_{n-2},$$

ou

$$\mathfrak{Q}'_n - \mathfrak{Q}'_{n-1} \geqq \mathfrak{Q}'_{n-1} - \mathfrak{Q}'_{n-2} + \alpha_n\mathfrak{Q}'_{n-1};$$

sous cette forme, on voit que $\mathfrak{Q}'_n - \mathfrak{Q}'_{n-1}$ est supérieur ou égal à $\mathfrak{Q}'_{n-1} - \mathfrak{Q}''_{n-2}$, à $\mathfrak{Q}'_{n-2} - \mathfrak{Q}'_{n-3}$, à $\mathfrak{Q}'_1 - \mathfrak{Q}'_0 = 1 + \alpha_1$; les inégalités

$$\mathfrak{Q}'_n - \mathfrak{Q}'_{n-1} \geqq 1, \ldots, \mathfrak{Q}'_1 - \mathfrak{Q}'_0 \geqq 1,$$

entraînent $\mathfrak{Q}'_n \geqq n + 1$, pour $n = 1, 2, \ldots$; la série équivalente à la fraction continue est donc absolument convergente et la proposition est démontrée. La somme de la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\mathfrak{Q}'_{n-1}\mathfrak{Q}'_n}$ est au plus égale à la somme de la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, c'est-à-dire à 1 (n° **89**). Si donc on désigne par A la valeur de la fraction, on a

$$a_0 - 1 \leqq \mathrm{A} \leqq a_0 + 1 ;$$

A ne peut d'ailleurs atteindre l'une des valeurs $a_0 - 1, a_0 + 1$ que si la somme de la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\mathfrak{Q}'_{n-1}\mathfrak{Q}'_n}$ est égale à 1, ce qui ne peut avoir lieu que dans le cas où l'on aurait $\mathfrak{Q}'_n = n + 1$, et par conséquent $\alpha_n = 0$, $(n = 1, 2, \ldots)$; cette circonstance exceptionnelle se présente effectivement, comme il est aisé de le voir, dans le cas où l'on a $a_n = 2$, $b_n = -1$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Si, sans rien supposer sur les quantités $a_0, a_1, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$, on suppose $|b_{n+r}| = 1$, $|a_{n+r}| \geqq 2$, pour $r = 1, 2, \ldots$, on voit, d'après cela, que la fraction $\frac{\mathfrak{P}_{n,r}}{\mathfrak{Q}_{n,r}}$ définie au n° **142**, admet, pour r infini, une limite A_n qui vérifie les inégalités $a_n - 1 \leqq \mathrm{A}_n \leqq a_n + 1$; on en conclut que si les deux quantités

$$\mathfrak{Q}_{n-1}(a_n - 1) + \mathfrak{Q}_{n-2}, \qquad \mathfrak{Q}_{n-1}(a_n + 1) + \mathfrak{Q}_{n-2}$$

sont de même signe, la fraction continue est certainement convergente, et que sa valeur A est comprise entre

$$\frac{\mathcal{P}_{n-1}(a_n - 1) + \mathcal{P}_{n-2}}{\mathcal{Q}_{n-1}(a_n - 1) + \mathcal{Q}_{n-2}}, \qquad \frac{\mathcal{P}_{n-1}(a_n + 1) + \mathcal{P}_{n-2}}{\mathcal{Q}_{n-1}(a_n + 1) + \mathcal{Q}_{n-2}},$$

ou, dans le cas plus particulier où tous les nombres b_1, b_2, ... sont égaux à 1,

$$\frac{\mathcal{P}_n - \mathcal{P}_{n-1}}{\mathcal{Q}_n - \mathcal{Q}_{n-1}}, \qquad \frac{\mathcal{P}_n + \mathcal{P}_{n-1}}{\mathcal{Q}_n + \mathcal{Q}_{n-1}}.$$

Il n'est peut-être pas inutile d'observer que l'on parvient à des fractions continues pour lesquelles b_n est égal à -1 et où a_n est, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, un nombre entier supérieur ou égal à 2, en raisonnant comme on a fait au n° **33**, c'est-à-dire en partant d'un nombre A, et en posant successivement

$$A = a_0 - \frac{1}{A_1}, \quad A_1 = a_1 - \frac{1}{A_2}, \quad A_2 = a_2 - \frac{1}{A_3}, \ldots :$$

a_0 désigne la valeur approchée de A à une unité près, par excès. A_1 est plus grand que 1 ; a_1, au moins égal à 2, est la valeur approchée de A_1 à une unité près, par excès, etc.

145. — En désignant par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ deux suites données ne contenant pas de terme nul, considérons, à titre d'exemple, la fraction continue

$$\cfrac{\beta_1}{\beta_1 + \gamma_1 - \cfrac{\beta_2\gamma_1}{\beta_2 + \gamma_2 - \cfrac{\beta_3\gamma_2}{\beta_3 + \gamma_3 - \ldots}}}:$$

On a ici, en reprenant les notations du n° **143**,

$$a_0 = 0, \quad a_1 = b_1 + \gamma_1, \quad b_1 = \beta,$$
$$a_n = \beta_n + \gamma_n, \qquad b_n = -\beta_n\gamma_{n-1} \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

et par conséquent

$$\mathcal{P}_n - \gamma_n \mathcal{P}_{n-1} = \beta_n(\mathcal{P}_{n-1} - \gamma_{n-1}\mathcal{P}_{n-1})$$
$$= \beta_2\beta_3 \ldots \beta_n(\mathcal{P}_1 - \gamma_1\mathcal{P}_0) = \beta_1\beta_2 \ldots \beta_n ;$$

puis, en faisant $\mathfrak{P}_n = \gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_n s_n$,

$$s_n - s_{n-1} = \frac{\beta_1\beta_2 \ldots \beta_n}{\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_n},$$

$$s_n = \frac{\beta_1}{\gamma_1} + \frac{\beta_1\beta_2}{\gamma_1\gamma_2} + \ldots + \frac{\beta_1\beta_2 \ldots \beta_n}{\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_n};$$

on parvient de la même façon à l'expression de $\mathfrak{Q}_n$ et l'on a finalement

$$\mathfrak{P}_n = \gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_n s_n, \qquad \mathfrak{Q}_n = \gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_n(1 + s_n),$$

$$\frac{\mathfrak{P}_n}{\mathfrak{Q}_n} = \frac{s_n}{1 + s_n}.$$

On en conclut que la fraction continue proposée est convergente si la série

$$(\beta) \qquad \frac{\beta_1}{\gamma_1} + \frac{\beta_1\beta_2}{\gamma_1\gamma_2} + \ldots + \frac{\beta_1\beta_2 \ldots \beta_n}{\gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_n} + \ldots$$

est convergente et admet une somme différente de -1, ou encore si la valeur absolue de la somme s_n des n premiers termes de cette série augmente indéfiniment avec n ; dans le premiers cas la valeur de la fraction continue est $\frac{s}{1+s}$ en désignant par s la somme de la série ; elle est 1 dans le second cas ; en particulier si tous les nombres $\beta_1, \beta_2, \ldots, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ sont positifs, la fraction continue est toujours convergente. Inversement la proposition précédente permet de transformer la série (β) supposée convergente, en fraction continue ; en l'appliquant, par exemple, à la série

$$1 - e^{-1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \ldots,$$

on trouve sans peine

$$e - 1 = 1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \ldots}}}.$$

146. — Regardons les quantités a_n, b_n comme données pour les valeurs de n égales ou supérieures à 2, et considérons les deux suites infinies $p_0, p_1, \ldots p_n, \ldots, q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots,$ dont les élé-

ments p_n, q_n sont, à partir de $n=2$, respectivement définis au moyen de p_0, p_1, q_0, q_1, qui sont regardés comme des données, par les relations de récurrence

$$p_n = p_{n-1}a_n + p_{n-2}b_n, \qquad q_n = q_{n-1}a_n + q_{n-2}b_n.$$

L'analogie de ces relations avec les relations du n° **143** suggère naturellement l'idée de mettre le rapport $\frac{p_n}{q_n}$ sous la forme d'une fraction continue limitée

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \dots + \cfrac{b_n}{a_n}}},$$

dans laquelle les quantités a_2, a_3, ..., a_n, b_2, b_3, ..., b_n sont les mêmes que celles qui figurent dans les relations de récurrence : on va déterminer les trois éléments initiaux a_0, a_1, b_1 de manière que l'égalité précédente ait lieu pour toutes les valeurs de n. Conservons pour la fraction continue illimitée formée avec les éléments a_0, b_1, a_1, b_2, ..., les notations du n° **143**.

Puisque l'on doit avoir $\mathfrak{Q}_0 = 1$, il est clair qu'on ne peut pas s'arranger pour que les quantités $\mathfrak{P}_n$, $\mathfrak{Q}_n$ soient respectivement identiques aux quantités p_n, q_n ; mais on peut faire en sorte que l'on ait, pour les valeurs 0, 1, 2, ..., de n,

$$\mathfrak{P}_n = \frac{p_n}{q_0}, \qquad \mathfrak{Q}_n = \frac{q_n}{q_0}.$$

il suffira de résoudre par rapport à a_0, a_1, b_1 les relations

$$\mathfrak{P}_0 = \frac{p_0}{q_0}, \qquad \mathfrak{P}_1 = \frac{p_1}{q_0}, \qquad \mathfrak{Q}_1 = \frac{q_1}{q_0}$$

c'est-à-dire de prendre

$$a_0 = \frac{p_0}{q_0}, \qquad a_1 = \frac{q_1}{q_0}, \qquad b_1 = \frac{p_1q_0 - p_0q_1}{q_0^2};$$

Les relations

$$\mathfrak{P}_n = \mathfrak{P}_{n-1}a_n + \mathfrak{P}_{n-2}b_n, \qquad p_n = p_{n-1}a_n + p_{n-2}b_n,$$
$$\mathfrak{Q}_n = \mathfrak{Q}_{n-1}a_n + \mathfrak{Q}_{n-2}b_n, \qquad q_n = q_{n-1}a_n + q_{n-2}b_n,$$
$$(n = 2, 3, \dots).$$

montrent ensuite clairement que $\mathfrak{P}_n$ et $\mathfrak{Q}_n$ se déduisent de p_n et q_n en les divisant par le même facteur q_0.

Naturellement, si l'on ne veut pas être dans le cas d'exception signalé plus haut, on devra supposer que $p_1 q_0 - p_0 q_1$ n'est pas nul.

Si la fraction continue formée avec les quantités $a_0, a_1, \ldots, b_0, b_1, \ldots$ est convergente, sa valeur sera la limite de $\frac{p_n}{q_n}$ pour n infini.

147. — Si l'on se donne une fraction continue

$$(f) \qquad a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \ldots}}$$

on peut la transformer, et cela d'une infinité de façons, en une autre fraction continue

$$(f') \qquad a'_0 + \cfrac{b'_1}{a'_1 + \cfrac{b'_2}{a'_2 + \ldots}}$$

telles que les réduites de l'une soient respectivement égales aux réduites correspondantes de l'autre. Conservons, pour la fraction f les notations du n° **142**, en accentuant les quantités analogues pour la fraction (f').

Les éléments de cette dernière fraction devront être tels que l'on ait

$$\mathfrak{P}'_n = \frac{\mathfrak{P}_n}{\lambda_n}, \qquad \mathfrak{Q}'_n = \frac{\mathfrak{Q}_n}{\lambda_n},$$

en désignant par λ_n un nombre toujours différent de o et qui, pour $n = 0$ se réduise à 1, afin que l'on ait $\mathfrak{Q}'_0 = \mathfrak{Q}_0 = 1$.

Les relations

$$\mathfrak{P}_n = a_n \mathfrak{P}_{n-1} + b_n \mathfrak{P}_{n-2}, \qquad \mathfrak{P}'_n = a'_n \mathfrak{P}'_{n-1} + b'_n \mathfrak{P}'_{n-2},$$
$$\mathfrak{Q}_n = a_n \mathfrak{Q}_{n-1} + b_n \mathfrak{Q}_{n-2}, \qquad \mathfrak{Q}'_n = a'_n \mathfrak{Q}'_{n-1} + b'_n \mathfrak{Q}'_{n-2},$$

permettraient de déterminer, à partir de $n = 2$, a_n et b_n au moyen de $\mathfrak{P}_n, \ldots, \mathfrak{Q}_{n-2}$, ainsi que a'_n, b'_n au moyen de $\mathfrak{P}'_n, \ldots, \mathfrak{Q}'_{n-2}$; en

remplaçant ces dernières quantités par $\frac{\mathcal{P}_n}{\lambda_n}, \dots, \frac{\mathcal{Q}_{n-2}}{\lambda_{n-2}}$, on parvient de suite aux relations

$$a'_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} a_n, \qquad b'_n = \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_n} b_n \ (n = 2, 3, \dots).$$

Inversement, si ces dernières relations sont vérifiées et si l'on a en outre

$$\mathcal{P}'_0 = \mathcal{P}_0, \qquad \mathcal{P}'_1 = \frac{\mathcal{P}_1}{\lambda_1}, \qquad \mathcal{Q}'_1 = \frac{\mathcal{Q}_1}{\lambda_1},$$

c'est-à-dire

$$a'_0 = a_0, \qquad \lambda_1 = \frac{a_1}{a'_1} = \frac{b_1}{b'_1},$$

il est clair que l'on aura, pour $n = 0, 1, 2, \dots,$

$$\mathcal{P}'_n = \frac{\mathcal{P}_n}{\lambda_n}, \qquad \mathcal{Q}'_n = \frac{\mathcal{Q}_n}{\lambda_n},$$

Ainsi les conditions nécessaires et suffisantes pour que chaque réduite de la fraction (f') soit égale à la réduite correspondante de la fraction (f), consistent en ce que l'on ait

$$a'_0 = a_0, \qquad \frac{a_1}{a'_1} = \frac{b_1}{b'_1},$$

et que l'on puisse déterminer une suite de nombres non nuls $\lambda_0 = 1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ tels que l'on ait

$$a'_n = \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} a_n, \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b'_n = \frac{\lambda_{n-2}}{\lambda_n} b_n, \qquad (n = 2, 3, 4, \dots).$$

Il est à peine utile de dire que, si l'on se donne arbitrairement $\lambda_1, \lambda_2, \dots,$ et si l'on détermine $a'_0, b'_1, a'_1, b'_2, \dots$ par les relations précédentes, les réduites de la fraction (f') sont respectivement égales aux réduites de la fraction (f).

En écartant le cas où quelqu'une des quantités a_n, b_n serait nulle, on peut dire encore que les conditions nécessaires et suffisantes

pour l'égalité des réduites, prises respectivement dans les fractions (f) et (f'), consistent dans les relations

$$a'_0 = a_0, \qquad \frac{a'_n a'_{n-1}}{b'_n} = \frac{a_n a_{n-1}}{b_n}, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

En les supposant vérifiées on pourra prendre

$$\lambda_n = \frac{a'_1}{a_1} \frac{a'_2}{a_2} \cdots \frac{a'_n}{a_n}.$$

Si, par exemple, on veut que dans la fraction (f'), on ait $b'_n = 1$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, on devra prendre

$$a'_0 = a_0, \qquad a'_{2n} = \frac{b_1 b_3 \ldots b_{2n-1}}{b_2 b_4 \ldots b_{2n}} a_{2n},$$

$$a'_1 = \frac{a_1}{b_1}, \qquad a'_{2n+1} = \frac{b_2 b_4 \ldots b_{2n}}{b_1 b_3 \ldots b_{2n-1}} \frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}},$$

$(n = 1, 2, \ldots)$.

Si l'on voulait avoir $b'_n = -1$, on prendra

$$a'_0 = a_0, \qquad a'_{2n} = \frac{b_1 b_3 \ldots b_{2n-1}}{b_2 b_4 \ldots b_{2n}} a_{2n},$$

$$a'_1 = -\frac{a_1}{b_1}, \qquad a'_{2n+1} = -\frac{b_2 b_4 \ldots b_{2n}}{b_1 b_3 \ldots b_{2n-1}} \frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}}.$$

CHAPITRE IV

PREMIERS PRINCIPES DE LA THÉORIE DES FONCTIONS. POLYNOMES, FRACTIONS RATIONNELLES FONCTION EXPONENTIELLE, ETC...

I. — DES FONCTIONS EN GÉNÉRAL

148. — Considérons un ensemble (X) de nombres distincts, et regardons ces nombres comme des valeurs qui puissent être attribuées à une lettre x, laquelle sera désignée comme étant une *variable*. Supposons qu'à chaque valeur de x, c'est-à-dire à chaque élément de l'ensemble (X) corresponde un nombre que l'on regardera comme une valeur attribuée à une lettre y ; on dira que y est une fonction de x déterminée dans cet ensemble (X) : La fonction sera définie dans cet ensemble si la correspondance est définie. L'ensemble (Y) des valeurs distinctes que prend y est déterminé par la correspondance même : dire que b est un élément de (Y) c'est dire qu'il y a un élément a de (X) auquel correspond le nombre b.

A chaque élément de (X) correspond un élément de (Y) et un seul : mais rien n'empêche, dans la définition précédente, qu'à plusieurs éléments différents de (X) corresponde un même élément de (Y) ; en d'autres termes, la définition précédente n'implique pas que la correspondance entre (X) et (Y) soit parfaite (n° **66**). Le cas où cette correspondance est parfaite, où les valeurs de y qui correspondent à deux éléments de (X) sont toujours différentes, offre d'ailleurs un intérêt particulier et sera examiné plus tard.

Pour désigner une fonction de x, on fait souvent précéder la

lettre x d'une lettre [$f(x)$, $\varphi(x)$, $g(x)$ ...] ou d'un assemblage de lettres [$\log x$, $\sin x$, ...].

149. — Dans la théorie des nombres, on considère un très grand nombre de fonctions qui sont définies dans l'ensemble des nombres naturels. Telles sont le nombre des nombres premiers et non supérieurs à n, que l'on désigne habituellement par $\varphi(n)$, le nombre ou la somme des diviseurs de n, etc. La lettre n joue ici le rôle de la variable x.

a étant un nombre positif donné, on définit d'abord a^x comme le produit de x facteurs égaux à a : cette définition n'a de sens que si x est un nombre naturel ; la fonction a^x est d'abord définie dans l'ensemble des nombres naturels ; on la définit ensuite dans l'ensemble des nombres rationnels : elle sera définie plus tard dans l'ensemble des nombres réels.

Une table de logarithmes définit une correspondance entre les nombres naturels, depuis 1 jusqu'à 100 000, par exemple, et certains nombres qui en sont dits les logarithmes : elle définira donc, dans l'ensemble des nombres naturels de 1 à 100 000, une certaine fonction de x, dont la différence avec la fonction $\log x$, qui sera définie plus tard est au plus égale à une demi-unité du dernier ordre décimal.

L'ensemble (X) peut être un intervalle : par exemple, la fonction $\sqrt{1-x^2}$ est définie pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à l'intervalle $(-1, +1)$. Il peut être l'ensemble des nombres réels ; par exemple la fonction x^2 est définie pour toutes les valeurs de x.

150. — La fonction $y = f(x)$, déterminée dans l'ensemble (X) est dite bornée, en haut ou en bas, si l'ensemble (Y) est borné en haut ou en bas. Sa borne supérieure, ou sa borne inférieure, dans l'ensemble (X), est la borne supérieure ou la borne inférieure de (Y) ; la fonction est dite bornée [1] sans épithète

[1] Le fait que la fonction $f(x)$ est *déterminée* dans l'ensemble (X), par exemple dans l'intervalle (0, 1) n'implique nullement que la fonction soit bornée dans cet intervalle : Ainsi une fonction de x qui serait égale à 1 pour $x = 0$, à $\frac{1}{x}$ pour toutes les autres valeurs de l'intervalle ne serait pas bornée en haut dans l'intervalle considéré.

thèse si l'ensemble (Y) est borné en haut et en bas. Il en sera certainement ainsi si la différence entre deux éléments quelconques de (Y), c'est-à-dire entre deux valeurs quelconques de la fonction $f(x)$, reste moindre en valeur absolue, qu'un nombre positif fixe. L'*écart* de la fonction, dans (X), est alors la différence M — m entre les deux bornes : c'est l'écart de l'ensemble (Y) (n° **48**). Ces diverses notions donnent lieu à la remarque que voici :

Soit (X') un ensemble de valeurs de x contenu dans (X), la fonction $f(x)$ déterminée dans (X) est, par cela même déterminée dans (X'), et l'ensemble (Y') de ses valeurs dans (X') est évidemment contenu dans (Y). Si la fonction $f(x)$ est bornée en haut ou en bas, dans (X), elle est aussi bornée, en haut ou en bas, dans (X'). Sa borne supérieure M' dans (X') est plus égale à sa borne supérieure M dans (X); sa borne inférieure m' dans (X') est au moins égale à sa borne inférieure m dans (X). Son écart M' — m' dans (X') ne peut dépasser son écart M — m dans (X).

151. — La façon dont se comporte une fonction $f(x)$ aux environs d'un point d'accumulation a de l'ensemble (X) dans lequel elle est définie offre un intérêt particulier, et il convient d'introduire de suite, à ce sujet, quelques définitions et notations essentielles.

Que le point d'accumulation appartienne ou non à cet ensemble, on dit que la fonction $f(x)$ tend vers la limite A quand x tend vers a, ou plus brièvement que $f(x)$ admet au point a la limite A, et l'on écrit

$$\lim_{x=a}. f(x) = A,$$

pour dire, en gros, que la valeur de la fonction $f(x)$ est très voisine du nombre A, lorsque le nombre x, que l'on suppose toujours appartenir à l'ensemble (X), est très voisin de a, et d'une façon précise que, quelque petit que soit le nombre positif ε, il lui correspond un nombre positif η tel que l'on ait $| f(x) - A | < \varepsilon$ pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à (X) et satisfont à la condition $| x - a | < \eta$.

S'il en est ainsi, la limite A appartient à l'ensemble (Y) des valeurs distinctes de $f(x)$, ou bien est un point d'accumulation de cet ensemble, puisque, autrement, on pourrait regarder A comme le centre d'un intervalle $(A - \alpha, A + \alpha)$ auquel n'appartiendrait

aucun point de (X), en sorte que l'on aurait, pour tout point x de (X), $|f(x) - A| > \alpha$.

En supposant toujours que l'on ait $\lim_{x=a} f(x) = A$, il est clair que si $x_1, x_2, \ldots, x_n$, forment une suite infinie de nombres appartenant à (X), et admettant a pour limite, on aura $\lim_{n=\infty} f(x_n) = A$; mais l'existence d'une suite de nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ appartenant à (X), telle que l'on ait $\lim_{n=\infty} x_n = a$, $\lim_{n=\infty} f(x_n) = A$ n'implique pas que la fonction $f(x)$ admette A pour limite au sens que l'on a donné à ce mot ; on conçoit en effet que, en dehors des points $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, il puisse y avoir, dans l'ensemble (X), des points très rapprochés de a, et pour lesquels la fonction $f(x)$ ne soit pas voisine de A.

La remarque suivante est évidente : si l'on a $\lim_{x=a} f(x) = A$ et si l'on a, pour les valeurs de x appartenant à (X), $f(x) > B$, en désignant par B une constante, on aura $A \geqq B$.

152. — Lorsque le point d'accumulation a appartient à (X), la fonction $f(x)$ a en ce point une valeur déterminée $f(a)$. Si la fonction $f(x)$ admet en ce point une limite A, au sens qu'on vient d'expliquer, cette limite ne peut différer de $f(a)$; puisque l'inégalité $|f(x) - A| < \varepsilon$ doit être vérifiée, quelque petit que soit le nombre positif ε, par la valeur $x = a$, qui satisfait à l'inégalité $|x - a| < \eta$, quel que soit le nombre positif η. Lorsque le point d'accumulation a appartient à (X) et que l'on a, au sens précisé plus haut, $\lim_{x=a} f(x) = f(a)$, on dit que la fonction $f(x)$ est *continue* au point a. Si l'on n'a pas $\lim_{x=a} f(x) = f(a)$ la fonction est discontinue au point a. On ne parlera de la continuité ou de la discontinuité d'une fonction en un point, que si ce point est un point d'accumulation de (X), contenu dans (X).

153. — De même qu'on a précisé la signification de l'égalité $\lim_{x=a} f(x)$, on précisera la signification des égalités symboliques

$$\lim_{x=a} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x=a} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x=a} |f(x)| = +\infty.$$

La première, par exemple, veut dire que quelque grand que soit le nombre B, il lui correspond un nombre positif η tel que l'on ait $f(x) > B$, pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à (X) et vérifient la condition $|x - a| < \eta$. S'il en est ainsi, a ne peut appartenir à (X) ; car, si a appartenait à (X), la fonction $f(x)$ aurait en ce point une valeur déterminée $f(a)$ et en prenant B supérieur à $f(a)$, on ne pourrait avoir $f(x) > B$ pour la valeur $x = a$ qui satisfait à la condition $|x - a| < \eta$, quel que soit le nombre positif η.

On remarquera encore que, si l'on a $\lim_{x=a} f(x) = +\infty$ et si $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ forment une suite infinie de nombres, tels que l'on ait $\lim_{n=\infty} x_n = a$, on aura $\lim_{n=\infty} f(x_n) = +\infty$; mais l'existence d'une pareille suite de nombres n'implique pas que l'on ait $\lim_{x=a} f(x) = +\infty$.

De même si (X) n'est pas limité en haut ou en bas, on pourra préciser le sens des égalités symboliques

$$\lim_{x=+\infty} f(x) = A, \quad \lim_{x=+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x=+\infty} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x=-\infty} f(x) = A, \quad \lim_{x=-\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x=-\infty} f(x) = -\infty.$$

La dernière, par exemple, veut dire que quelque grand que soit le nombre positif B, on peut lui faire correspondre un nombre positif C, tel que l'on ait $f(x) < -B$, sous la condition que x appartienne à (X) et que l'on ait $x < -C$. Je crois inutile d'insister davantage.

154. — La notion de fonction, telle qu'elle a été présentée plus haut, est très générale ; elle se réduit au fond à une correspondance entre deux ensembles ; on va toutefois la généraliser encore. Je dois prévenir le lecteur que cette généralité qu'on recherche ici, on la recherche moins pour elle-même qu'en vue d'éviter d'insupportables répétitions dans l'étude des fonctions particulières ; elle permet d'ailleurs de distinguer nettement les suppositions sur lesquelles s'appuie chaque démonstration, et de ne faire intervenir,

dans les démonstrations, que les suppositions même. On reste ici dans un domaine purement logique.

L'idée de fonction peut être généralisée dans diverses directions : il est clair en effet qu'aux ensembles de nombres (X), (Y) qu'on a considérés jusqu'ici, on peut substituer d'autres ensembles.

Tout d'abord, au lieu de partir d'un ensemble de nombres (X), on peut partir d'un ensemble dont les éléments soient des systèmes de nombres, et faire correspondre un nombre à chacun de ces éléments : on parvient ainsi à la notion d'une fonction de plusieurs variables ; je me bornerai aux fonctions de deux variables, l'extension aux fonctions de trois, quatre... variables étant immédiate ; je ne dirai d'ailleurs de ces fonctions de deux variables, pour le moment, que ce qui est indispensable pour l'étude des fonctions d'une variable, où l'on ne peut empêcher qu'elles interviennent de temps en temps.

Partons d'un ensemble (XY) dont chaque élément soit un système de deux nombres, rangés dans un ordre déterminé : on regarde le premier des nombres qui figurent dans chaque système comme une valeur attribuée à une lettre (ou variable) x, et le second comme une valeur attribuée à une autre lettre (ou variable) y. En disant, comme d'habitude, que tous les éléments de (XY) sont distincts, il faut entendre que, si les systèmes des deux nombres x_1, y_1 et x_2, y_2 sont des éléments de (XY), on n'a pas à la fois $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.

Supposons maintenant qu'à chaque élément de (XY) corresponde un nombre qu'on regardera comme une valeur attribuée à une lettre z ; on dira que z est une fonction de x, y déterminée dans (XY). Les valeurs distinctes de z forment un ensemble (Z) dont chaque élément correspond à un élément de l'ensemble (XY). Celui-ci peut d'ailleurs être constitué de façons très diverses : je reviendrai sur l'étude d'ensembles de cette nature, étude que facilitera l'emploi du langage géométrique ; je ne veux signaler que deux cas spéciaux, le cas où chaque système de deux nombres qui constitue un élément de (XY) est formé de l'un quelconque des nombres x qui appartient à un ensemble de nombres (X), et de l'un quelconque des nombres y qui appartiennent à un ensemble de nombres (Y), et le cas plus particulier où l'ensemble (X) se réduit à un intervalle (a, a') et l'ensemble (Y) à un inter-

valle (b, b') ; dans ce dernier cas chaque élément de l'ensemble (XY) est un système de deux nombres x, y qui vérifient les conditions $a \leqq x \leqq a'$, $b \leqq y \leqq b'$ et chaque système de deux nombres x, y qui vérifient ces conditions est un élément de l'ensemble (XY) : à chacun de ces éléments correspond une valeur de la fonction $z = f(x, y)$, qui est ainsi déterminée pour tous les systèmes de valeurs de x, y qui vérifient les conditions précédentes. C'est, pour les fonctions de deux variables, la notion qui correspond à celle d'une fonction d'une variable déterminée dans un intervalle.

Par exemple, un polynome en x, y est évidemment une fonction déterminée dans n'importe quel ensemble (XY) constitué comme on vient de l'expliquer.

Si l'ensemble (Z) des valeurs distinctes de z est borné, on dira que la fonction $z = f(x, y)$ est bornée dans l'ensemble (XY) : les définitions de la borne supérieure ou inférieure, de l'écart de la fonction dans cet ensemble sont les mêmes que pour les fonctions d'une variable.

155. — Revenons à un ensemble (X), dont chaque élément est un nombre ou un point, une valeur attribuée à la variable x. On peut faire correspondre à chaque élément de (X) un ensemble de nombres $\mathcal{E}(x)$; on arrive ainsi à la notion d'un ensemble-fonction de x, déterminé dans l'ensemble (X), c'est-à-dire pour chaque valeur de x appartenant à (X).

Par exemple l'ensemble des nombres premiers non supérieurs à un nombre naturel n, l'ensemble des diviseurs d'un nombre naturel n sont définis dans l'ensemble des nombres naturels. L'ensemble des nombres premiers dont le premier chiffre est x est défini dans l'ensemble (X) des nombres 1, 2, 3, ..., 9. L'ensemble $\mathcal{E}(x)$ des nombres plus petits que x, est défini dans l'ensemble (X) des nombres réels. L'ensemble des nombres dont le carré est plus petit que x est défini dans l'ensemble (X) des nombres positifs, etc... Un intervalle (a, x) dont une borne a est donnée, peut être regardé comme un ensemble-fonction de l'autre borne x.

Il n'y a aucune difficulté de plus à concevoir des ensembles qui dépendent, de deux, trois... variables. Je ne m'y arrêterai pas.

Si l'ensemble $\mathcal{E}(x)$ déterminé dans l'ensemble (X) est borné en

haut, par exemple, pour chaque valeur de x appartenant à (X), il est clair que sa borne supérieure sera une fonction de x dans (X), de même sa borne inférieure, ou son écart, si, pour chaque valeur de x, appartenant à (X), l'ensemble $\mathcal{E}(x)$ est borné en haut et en bas.

Voici une proposition, où interviennent ces notions, qui nous sera souvent utile.

156. — Soit (A) un ensemble de nombres positifs dont o soit un point d'accumulation ; je suppose essentiellement que o ne fasse pas partie de (A). (A) pourra être par exemple l'ensemble des inverses des nombres naturels, ou l'ensemble des nombres positifs (non nuls) qui sont inférieurs à un nombre donné. Regardons les nombres qui constituent (A) comme des valeurs attribuées à la variable ε. Quand il sera question plus loin d'une valeur de ε, telle que ε_0, ε_1, ε', ..., il sera toujours entendu que cette valeur fait partie de l'ensemble (A). C'est d'ailleurs les valeurs de ε voisines du point d'accumulation o qui vont intervenir.

Soit $\mathcal{E}(\varepsilon)$ un ensemble de nombres déterminé pour chaque valeur de ε [appartenant à (A)] : $\mathcal{E}(\varepsilon)$ est un ensemble-fonction de ε déterminé dans (A). Je suppose essentiellement, sur l'ensemble $\mathcal{E}(\varepsilon)$, qu'il *existe*, c'est-à-dire qu'il contient des éléments en nombre fini ou infini, pour chaque valeur ε de (A). Je suppose en outre que l'ensemble $\mathcal{E}(\varepsilon)$ satisfasse aux deux conditions suivantes :

1° Si l'on a $\varepsilon' > \varepsilon''$, l'ensemble $\mathcal{E}(\varepsilon')$ contient l'ensemble $\mathcal{E}(\varepsilon'')$.

2° L'ensemble $\mathcal{E}(\varepsilon)$ est borné en haut et en bas, quelque soit le nombre ε, appartenant à (A). — Il convient d'observer que, en vertu de la première condition, si l'ensemble $\mathcal{E}(\varepsilon_0)$ est borné, il en est de même de tous les ensembles $\mathcal{E}(\varepsilon)$ pour lesquels ε est plus petit que ε_0.

Je désignerai par $\mathrm{L}(\varepsilon)$, $l(\varepsilon)$ la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble $\mathcal{E}(\varepsilon)$. En vertu de la condition 1°, on a, en supposant $\varepsilon' > \varepsilon''$ (n° **46**)

$$\mathrm{L}(\varepsilon') \geqq \mathrm{L}(\varepsilon'') \geqq l(\varepsilon'') \geqq l(\varepsilon') ;$$

De ces inégalités même, il résulte que, si ε'' est plus grand que ε', on a encore $\mathrm{L}(\varepsilon'') \geqq l(\varepsilon')$; en d'autres termes, cette inégalité subsiste quels que soient les nombres ε', ε'' : l'ensemble des

valeurs de la fonction $L(\varepsilon)$, définie dans (A), est formé de nombres supérieurs ou égaux à ceux qui constituent l'ensemble des valeurs de la fonction $l(\varepsilon)$ définie dans le même ensemble : la fonction $L(\varepsilon)$ est bornée en bas ; soit L sa borne inférieure ; la fonction $l(\varepsilon)$ est bornée en haut, soit l sa borne supérieure. Il est clair qu'on a $l \leq L$.

Il est bien aisé de voir que L et l sont les limites respectives pour $\varepsilon = 0$, des fonctions $L(\varepsilon)$, $l(\varepsilon)$.

En effet, L étant la borne inférieure de l'ensemble des valeurs distinctes de $L(\varepsilon)$, il y a des valeurs de $L(\varepsilon)$ qui sont aussi rapprochées qu'on voudra de L ; en d'autres termes, quelque petit que soit le nombre positif α, il y a, dans (A), un nombre ε' tel que l'on ait $L \leqq L(\varepsilon') < L + \alpha$. Pour les valeurs de ε inférieures à ε', $L(\varepsilon)$, toujours supérieur (ou égal) à L, est inférieur (ou égal) à $L(\varepsilon')$ et par suite inférieur à $L + \alpha$: ainsi, à chaque nombre positif α correspond un nombre positif ε', tel que l'on ait $0 \leqq L(\varepsilon) - L < \alpha$, pour toutes les valeurs de ε, moindres que ε', qui appartiennent à (A) : cela revient à dire que l'on a $\lim\limits_{\varepsilon=0} L(\varepsilon) = L$; l'égalité $\lim\limits_{\varepsilon=0} l(\varepsilon) = l$ se démontre de la même façon.

Ces préliminaires posés, mon objet principal est la démonstration du théorème suivant :

Sous les conditions imposées aux ensembles $\mathcal{E}(\varepsilon)$, on peut affirmer l'existence d'un nombre (ou d'un point) k, qui appartient à la fois à tous les ensembles $\mathcal{E}(\varepsilon)$, ou qui est un point d'accumulation pour chacun de ces ensembles ; rien n'empêche d'ailleurs que le point k appartienne à la fois à tous les ensembles $\mathcal{E}(\varepsilon)$ et soit en même temps un point d'accumulation pour chacun d'eux.

Il peut y avoir plusieurs points k, jouissant de la propriété qu'on vient de définir ; ces points forment un ensemble qui, s'il est infini, est clos ; les nombres L et l sont respectivement les bornes supérieure et inférieure de cet ensemble.

Avant de passer à la démonstration abstraite de ce théorème, le lecteur fera bien de se le représenter sous la forme géométrique : chaque ensemble $\mathcal{E}(\varepsilon)$ est un ensemble de points sur l'axe des abscisses, points dont chacun appartient à l'intervalle $[l(\varepsilon), L(\varepsilon)]$; quand ε diminue, l'ensemble $\mathcal{E}(\varepsilon)$ et l'intervalle $[l(\varepsilon), L(\varepsilon)]$ se resserrent, en quelque sorte, et, quand ε est très petit, cet inter-

valle est très voisin de l'intervalle (l, L) qu'il contient d'ailleurs ; dans l'intervalle $[l(\varepsilon), L(\varepsilon)]$, il y a certainement des points qui appartiennent à l'ensemble $\mathcal{E}(\varepsilon)$ et, par conséquent, aux ensembles analogues pour lesquels ε est plus grand, dans l'intervalle (l, L), qui est, au sens géométrique, la limite de l'intervalle $[l(\varepsilon), L(\varepsilon)]$, il y a des points k qui sont à la fois des points de tous les ensembles $\mathcal{E}(\varepsilon)$, ou des points d'accumulation de tous ces ensembles. Les points k de la première espèce sont, en quelque sorte, le résidu de tous les ensembles $\mathcal{E}(\varepsilon)$, quand ε tend vers o ; autour des points k de la seconde espèce, les points de l'ensemble $\mathcal{E}(\varepsilon)$ ne cessent pas, en quelque sorte, de s'entasser lorsque ε tend vers o.

Pour prouver l'existence d'un nombre k, je prouverai que le nombre L jouit des propriétés qui lui sont attribuées, c'est-à-dire que, en désignant par ε_0 un élément quelconque de (A), L est un point de $\mathcal{E}(\varepsilon_0)$ ou un point d'accumulation de $\mathcal{E}(\varepsilon_0)$.

En effet, quel que soit le nombre ε appartenant à (A), $L(\varepsilon)$ est, soit un point de $\mathcal{E}(\varepsilon)$, soit un point d'accumulation de $\mathcal{E}(\varepsilon)$; supposons dans ce qui suit $\varepsilon < \varepsilon_0$, l'ensemble $\mathcal{E}(\varepsilon)$ étant contenu dans $\mathcal{E}(\varepsilon_0)$, $L(\varepsilon)$ est aussi soit un point de $\mathcal{E}(\varepsilon_0)$, soit un point d'accumulation de $\mathcal{E}(\varepsilon_0)$: il faut bien qu'il en soit de même de la limite L de $L(\varepsilon)$ pour $\varepsilon = o$: car, si le point L n'appartenait pas à $\mathcal{E}(\varepsilon_0)$ et n'en était pas un point d'accumulation, on pourrait (n° **49**) le regarder comme le centre d'un intervalle $(L - \alpha, L + \alpha)$ qui ne contiendrait aucun point de $\mathcal{E}(\varepsilon_0)$ et aucun point d'accumulation de $\mathcal{E}(\varepsilon_0)$, ni par conséquent aucun point des ensembles $\mathcal{E}(\varepsilon)$, non plus qu'un point d'accumulation de l'un de ces ensembles, puisqu'ils sont tous contenus dans $\mathcal{E}(\varepsilon_0)$; cet intervalle ne contiendrait donc aucun des points $L(\varepsilon)$, qui, pour ε suffisamment petit, sont aussi voisins qu'on le veut de leur limite L. La contradiction est évidente. Le raisonnement précédent s'appliquerait aussi bien à l.

Ainsi il y a des nombres k (L et l par exemple) qui jouissent de la propriété suivante : Quel que soit l'élément ε_0 de l'ensemble (A), le point k est ou un point de $\mathcal{E}(\varepsilon_0)$ ou un point d'accumulation de $\mathcal{E}(\varepsilon_0)$. Si maintenant k n'appartient pas à $\mathcal{E}(\varepsilon_0)$, il n'appartient pas non plus aux ensembles $\mathcal{E}(\varepsilon)$ pour lesquels on a $\varepsilon < \varepsilon_0$, puisque tous ces ensembles sont contenus dans $\mathcal{E}(\varepsilon_0)$; pour tous ces ensembles, k est un point d'accumulation ; il est aussi un point d'accumulation pour l'ensemble $\mathcal{E}(\varepsilon)$ si ε est plus grand que ε_0, puisque

cet ensemble contient alors $\mathcal{E}(\varepsilon_0)$: k est un point d'accumulation pour tous les ensembles $\mathcal{E}(\varepsilon)$. Il est donc vrai que le point k appartient à la fois à tous les ensembles $\mathcal{E}(\varepsilon)$ ou bien est à la fois un point d'accumulation pour tous ces ensembles.

Puisque l'on a, quelque soit ε, $l(\varepsilon) \leqq k \leqq \mathrm{L}(\varepsilon)$, on voit, en faisant tendre ε vers o, que l'on a $l \leqq k \leqq \mathrm{L}$.

Je désignerai par $\mathcal{E}(0)$ l'ensemble des points k, précédemment définis. Cet ensemble se réduit évidemment à un point lorsque l'on a $\mathrm{L} = l$.

Dans ce cas, il est clair que toute fonction $f(\varepsilon)$ déterminée dans l'ensemble (A) et telle que l'on ait, pour chaque valeur ε de (A), $l(\varepsilon) \leqq f(\varepsilon) \leqq \mathrm{L}(\varepsilon)$, jouit de la propriété $\lim\limits_{\varepsilon = 0} f(\varepsilon) = \mathrm{L} = l$.

C'est une généralisation manifeste d'une proposition établie au n° **58**.

S'il y a un nombre infini de points k, l'ensemble $\mathcal{E}(0)$ est clos. c'est-à-dire qu'il contient ses points d'accumulation.

En effet si k_0 est un point d'accumulation de $\mathcal{E}(0)$, il y a aux environs de k_0, et aussi près de k_0 qu'on le veut, des points k, lesquels sont, soit des points de l'ensemble $\mathcal{E}(\varepsilon)$, soit des points d'accumulation de cet ensemble ; dans tous les cas, il y a des points de $\mathcal{E}(\varepsilon)$ qui sont aussi près qu'on le veut de k_0 ; donc k_0 est un point d'accumulation de $\mathcal{E}(\varepsilon)$ ou un point de cet ensemble. Ceci ayant lieu quelque soit ε, il faut bien que k_0 appartienne à l'ensemble $\mathcal{E}(0)$. On savait déjà que cet ensemble $\mathcal{E}(0)$ contient ses bornes supérieure et inférieure L, l.

Si k' est un point qui n'appartienne pas à l'ensemble $\mathcal{E}(0)$, on peut affirmer qu'aux environs de ce point, il n'y a plus de points de l'ensemble $\mathcal{E}(\varepsilon)$ pourvu que ε soit inférieur à un nombre suffisamment petit ε'. En effet parmi les ensembles $\mathcal{E}(\varepsilon)$ il y en a certainement un $\mathcal{E}(\varepsilon')$ tel que k' ne soit ni un point de $\mathcal{E}(\varepsilon')$ ni un point d'accumulation pour $\mathcal{E}(\varepsilon')$, car, autrement k' appartiendrait à l'ensemble $\mathcal{E}(0)$. Dès lors, il existe (n° **49**), un intervalle $(k' - \alpha, k' + \alpha)$ dont k' est le centre, et auquel n'appartient aucun point de $\mathcal{E}(\varepsilon')$, non plus qu'aucun point des ensembles $\mathcal{E}(\varepsilon)$ pour lesquels on a $\varepsilon < \varepsilon'$, puisque tous les points de ces derniers ensembles appartiennent à $\mathcal{E}(\varepsilon')$.

Le théorème qu'on vient d'établir prend une forme un peu plus simple quand tous les ensembles $\mathcal{E}(\varepsilon)$ sont clos.

On peut alors affirmer sous la condition 1° l'existence d'un ensemble $\mathcal{E}(o)$ dont tous les points appartiennent à la fois à tous les ensembles $\mathcal{E}(\varepsilon)$.

On aurait pu d'ailleurs se borner à la démonstration du théorème général dans ce cas particulier :

Le lecteur reconnaîtra en effet sans peine que le cas général se ramène au cas particulier, en remplaçant l'ensemble $\mathcal{E}(\varepsilon)$, satisfaisant aux conditions 1° et 2°, par l'ensemble clos $\mathcal{E}(\varepsilon) + \mathcal{E}'(\varepsilon)$ dont les éléments appartiennent soit à $\mathcal{E}(\varepsilon)$ soit à son ensemble dérivé $\mathcal{E}'(\varepsilon)$.

Dans plusieurs des applications qui vont suivre, l'ensemble (A) des valeurs de ε sera formé de tous les nombres positifs (à l'exclusion de o) qui sont inférieurs à un nombre positif fixe A.

Dans le cas où l'ensemble (A) se réduit à l'ensemble des inverses des nombres naturels, le théorème général peut être énoncé sous la forme que l'on va dire. Le lecteur pourra démontrer le théorème sous cette forme, et en déduire ensuite l'énoncé général.

Soit

$$\mathcal{E}_1, \quad \mathcal{E}_2, \quad \ldots, \quad \mathcal{E}_n, \quad \ldots$$

une suite infinie d'ensembles de nombres ou de points : on suppose que chacun de ces ensembles existe, c'est-à-dire que $\mathcal{E}_n$ contient des points, en nombre fini ou infini, quel que soit le nombre naturel n ; on suppose ensuite que $\mathcal{E}_n$ contient $\mathcal{E}_p$ si l'on a $n < p$, et que $\mathcal{E}_1$ est borné ; il en résulte que tous les ensembles suivants sont bornés.

Dans ces conditions, il existe un ensemble $\mathcal{E}_\omega$ composé d'un nombre fini ou infini de points, dont chacun est soit un point commun à tous les ensembles $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, ..., soit un point d'accumulation commun à tous ces ensembles.

157. — L'importante notion de la continuité en un point d'accumulation a de (X) s'éclaire en étudiant la façon dont se comporte en général une fonction $f(x)$, déterminée dans l'ensemble (X) pour les valeurs de la variable très voisines d'un point d'accumulation a, soit d'ailleurs que ce point appartienne à (X), soit qu'il ne lui appartienne pas.

En supposant seulement que la fonction $f(x)$ soit bornée aux environs de ce point, c'est-à-dire qu'il existe un nombre positif A

tel que la fonction $f(x)$ soit bornée dans l'ensemble des valeurs de x qui appartiennent à (X) et à l'intervalle $(a - A, a + A)$, je vais montrer qu'il existe un ou plusieurs nombres k, jouissant de la propriété suivante : quelque petits que soient les nombres positifs α, β il y a des nombres x appartenant à (X) tels que l'on ait à la fois

$$|x - a| < \alpha, \quad |f(x) - k| < \beta,$$

en sorte que, pour les valeurs de x appartenant à (X) et très voisines de a, les valeurs de $f(x)$ se serrent en quelque sorte autour de l'un ou de l'autre des nombres k, avec lesquels d'ailleurs elles peuvent coïncider : l'ensemble des nombres k, s'il est infini, est clos.

Soit ε une variable positive, inférieure ou égale à A, la fonction $f(x)$ est déterminée et bornée dans l'ensemble (X_ε) des valeurs de x qui appartiennent à la fois à (X) et à l'intervalle $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, dont le point a est le centre ; désignons par $\mathcal{E}(\varepsilon)$ l'ensemble des valeurs distinctes qu'elle prend dans cet ensemble (X_ε), par $L(\varepsilon)$, $l(\varepsilon)$ les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble $\mathcal{E}(\varepsilon)$. On reconnaît de suite que les ensembles $\mathcal{E}(\varepsilon)$, définis pour les valeurs positives de ε qui sont inférieures ou égales à A, satisfont aux conditions du n° **156**. Il existe donc un ensemble $\mathcal{E}(0)$ de nombres dont chacun est un point commun à tous les ensembles $\mathcal{E}(\varepsilon)$, ou bien un point d'accumulation pour chacun de ces ensembles : les bornes inférieure et supérieure L et l des fonctions $L(\varepsilon)$, $l(\varepsilon)$ définies dans l'ensemble des valeurs de ε qui vérifient les conditions $A \geqq \varepsilon > 0$ appartiennent à cet ensemble $\mathcal{E}(0)$, dont elles sont les bornes supérieure et inférieure.

Soit k un élément de cet ensemble ; dans tout intervalle $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, si petit que soit le nombre positif ε, il y a une valeur de x appartenant à (X), pour laquelle la valeur de $f(x)$ diffère aussi peu qu'on le veut de k ; d'une façon plus précise, si l'on se donne deux nombres positifs α, β aussi petits qu'on le veut, il existe un nombre x pour lequel on a à la fois

$$|x - a| < \alpha, \quad |f(x) - k| < \beta ;$$

c'est ce qui arrivera en particulier si a appartient à (X) et si l'on a $f(a) = k$, puisque, alors, les deux inégalités précédentes sont

vérifiées pour $x = a$. Dans tous les cas, il y aura une suite infinie de nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ tels que l'on ait $\lim\limits_{n=\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n=\infty} f(x_n) = k$. Dans l'hypothèse $f(a) = k$, on pourra prendre tous les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ égaux à a. Lorsque cette supposition n'est pas vraie, il n'est pas difficile de voir qu'on peut supposer tous les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ différents entre eux. Quoi qu'il en soit, si $\mathcal{E}(o)$ contient un autre nombre k' différent de k, il y aura une autre suite infinie $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \ldots$ appartenant aussi à (X) et telle qu'on ait $\lim\limits_{n=\infty} x'_n = a$, $\lim\limits_{n=\infty} f(x'_n) = k'$. Bien entendu, si l'ensemble $\mathcal{E}(o)$ contient plus d'un point k, on ne peut pas écrire, au sens du n° **151**, $\lim\limits_{x=a} f(x) = k$.

Au reste, il est clair que les éléments de l'ensemble $\mathcal{E}(o)$ sont seuls à jouir des propriétés qu'on vient de spécifier, puisque si k_1 n'appartient pas à l'ensemble $\mathcal{E}(o)$, on peut (n° **156**) fixer deux nombres positifs α, β tels que l'on ait $| f(x) - k_1 | > \beta$ pour tous les points x de (X) qui sont à une distance de a moindre que α.

En particulier, il y a des points x', x'' dans (X) aussi rapprochés qu'on le veut de a et tels que la différence $f(x'') - f(x')$ soit aussi voisine qu'on le veut de $L - l$.

Donc, pour que $f(x)$ admette une limite au point a, il faut que l'on ait $L = l$. Cette condition est d'ailleurs suffisante. Si, en effet, on désigne par α un nombre positif quelconque, on peut lui faire correspondre un nombre positif ε' tel que l'on ait à la fois $L(\varepsilon') < L + \alpha$, $l(\varepsilon') > l - \alpha$; ces inégalités subsistent en remplaçant $L(\varepsilon')$ et $l(\varepsilon')$ par $f(x)$ si l'on suppose que x appartienne à la fois à (X) et à l'intervalle $(a - \varepsilon', a + \varepsilon')$ puisque l'on a alors $l(\varepsilon') \leq f(x) \leq L(\varepsilon')$. On aura donc, en supposant $L = l$,

$$| f(x) - L | < \alpha,$$

sous la condition que x appartienne à (X) et soit à une distance de a moindre que ε' ; cela revient à dire que l'on a

$$\lim_{x=a} f(x) = L.$$

Lorsque l'on a $L = l$, l'ensemble $\mathcal{E}(o)$ se réduit évidemment au seul nombre L.

158. — Quand la fonction $f(x)$, bornée aux environs de a, n'admet pas de limite en ce point, on peut d'après ce qu'on vient de dire, trouver dans (X) des points x', x'' aussi voisins qu'on le voudra de a, tels que la valeur absolue de la différence $f(x') - f(x'')$ dépasse tel nombre fixe, inférieur à $L - l$, que l'on voudra : Si donc on ne peut trouver de tels points x', x'', c'est que la fonction $f(x)$ admet une limite au point a. En d'autres termes :

Pour que la fonction $f(x)$ admette une limite au point d'accumulation a, il faut et il suffit qu'à chaque nombre positif α corresponde un nombre positif ε tel que l'on ait $|f(x'') - f(x')| < \alpha$, pourvu que les points x', x'' appartiennent à (X) et soient à une distance de a moindre que ε.

Il n'est pas utile de dire dans cet énoncé que la fonction $f(x)$ doit être bornée aux environs de a ; elle l'est certainement en vertu des conditions imposées, puisque si l'on choisit un couple de nombres correspondants α_0, ε_0, l'écart de la fonction $f(x)$, dans l'ensemble des points de (X) qui appartiennent à l'intervalle $(a - \varepsilon_0, a + \varepsilon_0)$ est au plus égal à α_0.

La forme de la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(x)$ ait une limite au point d'accumulation a est une généralisation manifeste de la condition du n° **56** pour qu'une suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ ait une limite ; elle peut d'ailleurs se déduire aisément de cette condition, sans passer par l'étude qu'on vient de faire. En effet, tout d'abord, il est clair que la condition imposée pour l'existence d'une limite est nécessaire : si maintenant, on la suppose vérifiée et si l'on désigne par $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ une suite de points appartenant à (X) qui ait pour limite le point a, la suite $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ devra, d'après le n° **56**, avoir une limite ; soit b cette limite ; si l'on choisit le nombre naturel p tel que l'on ait $|x_n - a| < \varepsilon$ sous la condition $n > p$, on devra avoir $|f(x) - f(x_n)| < \alpha$, pourvu que x appartienne à (X) et que les conditions $n > p$, $|x - a| < \varepsilon$ soient vérifiées ; en faisant croître n indéfiniment, on en conclura $|f(x) - b| \leqq \alpha$, sous la condition que x appartienne à (X) et vérifie la condition $|x - a| < \varepsilon$; il est clair que b est la limite de $f(x)$, pour le point a, au sens du n° **151**.

159. — Les résultats précédents s'appliquent à chaque point

d'accumulation a de l'ensemble (X), pourvu que la fonction $f(x)$ soit bornée aux environs de ce point.

Par conséquent, si l'on suppose que l'ensemble (X) dans lequel la fonction $f(x)$ est déterminée soit clos, et que la fonction $f(x)$ soit bornée dans cet ensemble, on pourra attacher à chaque point d'accumulation a un certain ensemble $\mathcal{E}_a(o)$, dont on a expliqué les propriétés au n° **157**, et en particulier les bornes L_a, l_a de cet ensemble. Celles-ci s'appellent les bornes supérieure et inférieure de la fonction $f(x)$ au point d'accumulation a [1]. $L_a - l_a$ est l'écart ou la discontinuité de la fonction en a. La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $f(x)$ soit continue au point d'accumulation a consiste en ce que l'écart de la fonction, en ce point, soit nul. Si l'on veut attribuer un sens à ces quantités L_a, l_a pour un point isolé a de (X), on les regardera comme égales à $f(a)$, on regardera l'ensemble $\mathcal{E}_a(o)$ comme se réduisant au seul point $f(a)$.

Imaginons par exemple une fonction de x définie comme il suit dans l'intervalle (o, 1). Pour $x = o$, $f(x)$ est nul; il en est de même pour toutes les valeurs rationnelles de x qui, mises sous forme d'une fraction irréductible, ont un dénominateur impair; pour les autres valeurs rationnelles de x, $f(x)$ est égal à 1; enfin pour les valeurs irrationnelles de x, $f(x)$ est égal à 2. Tout point a de l'intervalle est un point d'accumulation, la fonction $f(x)$ y a une des trois valeurs o, 1, 2; mais il est clair qu'on peut trouver dans le voisinage du point a, aussi près de lui qu'on voudra, des points pour lesquels la fonction est égale soit à o, soit à 1, soit à 2. L'ensemble $\mathcal{E}(o)$ se compose évidemment de ces trois nombres; on a $l = o$, $L = 2$. Il est le même pour tous les points; on pourrait aussi bien s'arranger pour qu'il changeât avec a; prendre par exemple la fonction $f(x)$ égale tantôt à x, à x^2, à x^3. Le lecteur n'aura aucune peine à multiplier les exemples de cette sorte.

160. — Voyons maintenant quelles conclusions on peut tirer

[1] Ces notions peuvent s'étendre : si par exemple on supprime de (X) tous les points à gauche de a, les nombres L_a, l_a deviendront les bornes supérieure et inférieure à droite de la fonction en a. $L_a - l_a$ sera l'écart à droite, en a. On définirait de même la borne supérieure ou inférieure et l'écart à gauche. Le lecteur trouvera dans la thèse de M. Baire d'autres extensions des mêmes idées, beaucoup plus profondes.

de la supposition suivante : l'ensemble (X) dans lequel la fonction $f(x)$ est déterminée étant borné (en haut et en bas), l'ensemble (Y) des valeurs de cette fonction dans (X) n'est pas borné, en haut, par exemple : en d'autres termes, quel que grand que soit un nombre donné P, il y a, dans (X), des valeurs de x pour lesquelles on a $f(x) > P$.

Je vais montrer que, dans ces conditions, l'ensemble (X) admet au moins un point d'accumulation k, qui peut d'ailleurs appartenir à (X) ou ne pas lui appartenir, dans le voisinage duquel la fonction $f(x)$ dépasse tel nombre qu'on voudra ; en d'autres termes, quelque grand que soit le nombre positif P, quelque petit que soit le nombre positif ε, il y a des valeurs de x appartenant à (X) pour lesquelles on a à la fois $|x - k| < \varepsilon$, $f(x) > P$. Bien entendu, il ne faut pas en conclure $\lim_{x=k} f(x) = +\infty$; car il peut y avoir, dans le voisinage du point k, des valeurs de x pour lesquelles la fonction $f(x)$ ne soit pas grande.

Soit en effet ε un nombre positif quelconque, qu'on supposera comme plus haut, inférieur à un nombre fixe A : par hypothèse, il y a dans l'ensemble borné (X) des points pour lesquels la valeur de $f(x)$ est supérieure à $\frac{1}{\varepsilon}$, et cela quelque soit ε : désignons par $\mathcal{E}(\varepsilon)$ l'ensemble de ces points. On voit de suite que les ensembles $\mathcal{E}(\varepsilon)$ satisfont aux conditions du n° **156** : il y a donc des points k formant un ensemble $\mathcal{E}(0)$ qui sont communs à tous ces ensembles, ou qui sont pour chacun des points d'accumulation. La première hypothèse est inadmissible : si le point k appartenait à tous les ensembles $\mathcal{E}(\varepsilon)$, lesquels sont contenus dans (X), le point k appartiendrait à (X) et la fonction $f(x)$ aurait une valeur déterminée $f(k)$ en ce point, on ne pourrait donc avoir, pour $x = k$, $f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$, en prenant $\varepsilon < \frac{1}{f(k)}$; k est donc un point d'accumulation pour tous les ensembles $\mathcal{E}(\varepsilon)$, donc aussi pour (X), et l'on voit qu'il y a des points x appartenant à (X), aussi voisins qu'on le veut de k, et pour lesquels $f(x)$ est aussi grand qu'on le veut.

Il n'y a d'ailleurs que les points k de l'ensemble $\mathcal{E}(0)$ à pouvoir jouir de cette propriété. Car si k' n'appartient pas à l'ensemble $\mathcal{E}(0)$, on peut affirmer l'existence de deux nombres positifs ε', α' tels que

dans l'intervalle $(k' - \alpha', k' + \alpha')$ ne se trouve aucun point des ensembles $\mathcal{E}(\varepsilon)$ qui correspondent à des valeurs de ε inférieures ou égales à ε' ; pour les valeurs de x qui appartiennent à cet intervalle, $f(x)$ ne peut dépasser $\frac{1}{\varepsilon}$.

Il est clair que la fonction $f(x)$ ne peut avoir de limite au point k ; si le point k appartient à (X), ce qui arrivera nécessairement si (X) est clos, la fonction $f(x)$ ne peut être continue en ce point. Ainsi :

Une fonction $f(x)$ déterminée dans un ensemble clos (X) et continue en chacun des points d'accumulation de cet ensemble y est nécessairement bornée.

161. — Il y a des conclusions analogues à tirer de la supposition suivante ; le nombre b est un point d'accumulation de l'ensemble (Y) des valeurs distinctes que prend la fonction $f(x)$ dans l'ensemble *borné* (X).

Excluons d'abord le cas où le point b fait partie de (Y) c'est-à-dire où il y a dans (X) une valeur de x pour laquelle on a $f(x) = b$.

Soit ε une variable positive, qui reste, si l'on veut, inférieure ou égale à un nombre fixe A. Quelque petit que soit ε, il y a dans (Y) des nombres dont la différence avec b est moindre que ε, ou, ce qui revient au même, il y a dans (X) des nombres x pour lesquels on a $|f(x) - b| < \varepsilon$. Soit $\mathcal{E}(\varepsilon)$ l'ensemble de ces nombres x ; on reconnaît de suite que l'ensemble $\mathcal{E}(\varepsilon)$, défini pour chaque valeur positive de ε, satisfait aux conditions du n° **156**, en sorte qu'il existe un ensemble $\mathcal{E}(0)$ de points k dont chacun appartient à tous les ensembles $\mathcal{E}(\varepsilon)$ ou est, pour chacun de ces ensembles un point d'accumulation. La première supposition est inadmissible, car le point k appartenant à tous les ensembles $\mathcal{E}(\varepsilon)$, on aurait $|f(k) - b| < \varepsilon$, quelque petit que fût ε, ce qui exige $f(k) = b$, contrairement à l'hypothèse. Le point k est donc un point d'accumulation de tous les ensembles $\mathcal{E}(\varepsilon)$ et par suite de l'ensemble (X), qui les contient. On voit qu'il y a, dans (X), aussi près qu'on voudra du point k, et quelque petit que soit le nombre positif ε, des points pour lesquels on a $|f(x) - b| < \varepsilon$. Il ne faut pas en conclure $\lim_{x=k} f(x) = b$, puisqu'il peut y avoir aussi, dans le voisinage de k, des points pour lesquels $f(x)$ diffère notablement de x.

Si le point b était toujours un point d'accumulation de (Y), mais en même temps un point de (Y), il suffirait, pour s'assurer que les conclusions précédentes subsistent, d'appliquer les raisonnements précédents à l'ensemble (X') que l'on déduirait de (X) en en supprimant tous les points x pour lesquels on a $f(x) = b$ et à l'ensemble (Y') que l'on déduit de (Y) en en supprimant b : b reste un point d'accumulation de (Y'), et cet ensemble est formé des valeurs distinctes de la fonction $f(x)$ dans l'ensemble borné (X'), etc... Les raisonnements ne tomberaient en défaut que si (X') n'existait pas, c'est-à-dire si l'on avait $f(x) = b$ pour toutes les valeurs de x appartenant à (X) ; dans ce cas (Y) se réduirait à b, qui ne serait donc pas un point d'accumulation.

Enfin, on voit comme précédemment que les points de l'ensemble $\mathcal{E}(o)$ sont seuls à jouir de la propriété qu'on a démontrée appartenir au point k.

Si l'ensemble (X) est clos, il contient tous les points k ; si, en outre, la fonction $f(x)$ est continue pour chacun de ces points d'accumulation, il faut que l'on ait $\lim\limits_{x=k} f(x) = f(k)$, il faut donc que $f(k)$ soit égal à b ; en d'autres termes l'ensemble (Y) contient le point b ; l'ensemble (Y) contient tous ses points d'accumulation ; on a déjà démontré qu'il est borné : il est clos. Ainsi :

Si une fonction $f(x)$ est déterminée dans l'ensemble clos (X), et si elle est continue en chacun des points d'accumulation de cet ensemble, l'ensemble (Y) des valeurs distinctes qu'elle prend dans (X) est fini ou clos. En particulier, cet ensemble (Y) contient sa borne supérieure et sa borne inférieure ; c'est dire qu'il y a dans (X) une valeur de x qui fait acquérir à $f(x)$ une valeur égale à sa borne supérieure dans (X), une valeur de x qui fait acquérir à $f(x)$ une valeur égale à sa borne inférieure dans (X).

162. — Une fonction $f(x)$ déterminée dans un ensemble clos (X), continue en chaque point d'accumulation de cet ensemble est dite continue dans l'ensemble (X).

Je vais montrer qu'elle est *uniformément* continue dans cet ensemble, c'est-à-dire qu'à chaque nombre positif ε, si petit qu'il soit, correspond un nombre positif α tel que l'on ait $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$, sous la seule condition que x, x' appartiennent à (X) et que l'on

ait $|x' - x| < \beta$. Remarquons que si l'on se donne α, et un point d'accumulation x' de l'ensemble (X), l'existence du nombre β résulte de ce que l'on suppose la fonction continue en x' ; mais la valeur de β semble devoir dépendre de x' : la proposition énoncée revient à dire que α étant donné, il existe un nombre β qui ne dépend pas de x' : en outre, il n'est pas nécessaire de spécifier que x' est un point d'accumulation.

Si, la fonction $f(x)$ n'était pas uniformément continue au sens qu'on vient de dire, c'est qu'il existerait un nombre positif a jouissant de la propriété suivante : quelque petit que soit le nombre positif ε, il y a dans (X) des points x, x' dont la distance est moindre que ε, et pour lesquels on a $|f(x) - f(x')| \geqq a$; on voit de suite en effet que nier l'existence du nombre a c'est affirmer qu'à chaque nombre positif a' correspond un nombre positif ε tel qu'on ait $|f(x) - f(x')| < a'$ sous la condition $|x - x'| < \varepsilon$.

Je vais donc supposer l'existence du nombre a, sans rien supposer de plus sur la fonction $f(x)$, déterminée dans l'ensemble clos (X), les conclusions qu'on en tirera seront incompatibles avec la continuité de cette fonction.

Soit ε une variable positive : par hypothèse il y a des points x de (X) auxquels on peut associer des points x' de (X) tels que l'on ait à la fois $|x' - x| < \varepsilon$, $|f(x') - f(x)| \geqq a$. Soit $\mathcal{E}(\varepsilon)$ l'ensemble de ces points ; on notera, en passant que l'ensemble $\mathcal{E}(\varepsilon)$ contient en même temps les points x et x'. Les ensembles $\mathcal{E}(\varepsilon)$ vérifient encore les conditions du n° **156**; on en conclut l'existence de points k, formant un ensemble $\mathcal{E}(0)$, dont chacun appartient à tous les ensembles $\mathcal{E}(\varepsilon)$ ou est un point d'accumulation pour tous ces ensembles.

Soit k un point de l'ensemble $\mathcal{E}(0)$: par hypothèse, quelque soit ε, il y a dans (X) et aussi près qu'on veut de k, des points x, x' dont la distance est moindre que ε, et pour lesquels on a $|f(x') - f(x)| > a$; l'un de ces points peut coïncider avec k; mais, dans tous les cas, il est impossible que la fonction $f(x)$ ait une limite au point k.

Puisque, si près qu'on veut du point k, il y a des points de (X), k est forcément un point d'accumulation de (X), qui appartient donc à (X), si cet ensemble est clos. Il est impossible que la fonction $f(x)$ soit continue en ce point.

J'ai dit plus haut qu'il est inutile de spécifier, dans la définition de la continuité, que le point x' est un point d'accumulation : cela tient à ce que, lorsqu'il en est autrement, la condition $|x - x'| < \beta$ ne peut être vérifiée que pour $x = x'$ quand β est suffisamment petit.

En résumé, si la fonction $f(x)$, déterminée dans l'ensemble clos (X), est continue en chaque point d'accumulation de (X), elle est bornée dans cet ensemble ; l'ensemble (Y) de ses valeurs distinctes est clos ; la fonction $f(x)$ est uniformément continue dans (X) [1].

163. — La fonction $f(x)$, déterminée dans l'ensemble (X), est dite croissante dans cet ensemble si l'inégalité $x > x'$, où x et x' sont deux éléments de (X) entraîne toujours l'inégalité $f(x) > f(x')$, ou, ce qui revient au même, si le rapport $\frac{f(x) - f(x')}{x - x'}$ est toujours positif, pourvu que x et x' soient deux nombres distincts de (X) ; la fonction est dite décroissante dans (X), si le précédent rapport est toujours négatif. Si la fonction $f(x)$ est ou croissante, ou décroissante, dans (X), la correspondance entre l'ensemble (X) et l'ensemble (Y) des valeurs de $f(x)$ est parfaite.

Si, quels que soient les nombres distincts x, x' appartenant à (X) le rapport $\frac{f(x) - f(x')}{x - x'}$ n'est jamais négatif, je dirai que la fonction $f(x)$ est non-décroissante ; si le précédent rapport n'est jamais positif, je dirai que la fonction $f(x)$ est non-croissante [2].

Si l'ensemble (X) est borné et contient ses bornes M, m ; il est clair que les quantités f (M), $f(m)$ seront les bornes supérieure et inférieure de la fonction $f(x)$, si elle est non-décroissante ; ses bornes inférieure et supérieure, si elle est non-croissante.

Si la fonction $f(x)$ est non-décroissante ou non-croissante, dans (X) et si, en désignant par x', x'' deux nombres distincts appartenant à (X), on a $f(x') = f(x'')$ la fonction $f(x)$ prendra la même valeur pour tout nombre x''' appartenant à (X) et compris entre x' et x''.

[1] Cf. Jordan. — *Cours d'Analyse*, t. I, p. 51.

[2] Ces expressions, au point de vue grammatical, sont quelque peu incorrectes. L'épithète « non-croissante », par elle-même, veut dire seulement que la fonction $f(x)$ n'est pas croissante ; on lui a donné plus haut une signification plus précise.

164. — Les notions et les propositions qui précèdent s'appliquent au cas où l'ensemble (X) dans lequel la fonction $f(x)$ est déterminée est un intervalle (a, b). Il convient toutefois de s'arrêter un peu sur ce cas, en raison de son importance.

C'est d'abord de la continuité que je m'occcuperai.

La fonction $f(x)$, déterminée dans l'intervalle (a, b), est dite continue en un point x_0 de cet intervalle si à chaque nombre ε, si petit qu'il soit, correspond un nombre positif η tel que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :

1° On a $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à l'intervalle (a, b) et qui satisfont à la condition $|x - x_0| < \eta$.

2° On a $|f(x_0 + \theta\eta) - f(x_0)| < \varepsilon$ pour toutes les valeurs, de θ qui appartiennent à l'intervalle (0, 1) si x_0 est égal à $a\ (< b)$, à l'intervalle (— 1, 0) si x_0 est égal à b, à l'intervalle (— 1, 1) si x_0 n'est ni a, ni b.

3° Dans tout intervalle (a', b') contenu dans l'intervalle (a, b), contenant x_0 et dont l'écart est moindre que η, l'écart de la fonction est moindre que ε.

La première définition, en se rappelant que tout point d'un intervalle est un point d'accumulation de cet intervalle revient à celle du n° **152**; la seconde et la troisième s'y ramènent immédiatement.

Conformément à ce qui a été dit au n° **162**, on dira qu'une fonction est continue dans l'intervalle (a, b) si elle est continue pour chaque point de cet intervalle. Elle est alors *uniformément* continue dans cet intervalle, c'est-à-dire qu'à chaque nombre positif ε correspond un nombre positif η tel que l'on ait $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$, pourvu que les points x, x' appartiennent à l'intervalle (a, b) et soient à une distance moindre que η [1].

Si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b), on peut partager l'intervalle (a, b) en un nombre fini d'intervalles partiels assez petits pour que dans chacun d'eux l'écart de la fonction soit

[1] Si l'on ne veut parler que de fonctions définies dans un intervalle, on peut prendre ce qu'on vient de dire pour la définition de la continuité dans un intervalle : il est clair que si une fonction est continue dans un intervalle (en ce sens), elle est continue en chaque point de l'intervalle. La démonstration de la réciproque est indispensable.

moindre que tel nombre positif ε que l'on voudra. Réciproquement, s'il en est ainsi, la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b).

Si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b) elle est continue dans tout ensemble clos (X) contenu dans (a, b).

Le lecteur se rendra compte immédiatement de l'importance pratique des fonctions continues en pensant que ce sont les seules dont on puisse calculer une valeur approchée quand on ne connaît la variable qu'approximativement.

165. — Les notions précédentes seront étendues plus tard aux fonctions de deux variables. Je veux toutefois, pour la commodité de ce qui suivra, définir de suite la continuité d'une telle fonction $f(x, y)$ dans le cas où celle-ci est déterminée pour tous les systèmes de deux nombres x, y vérifiant les conditions $a \leqq x \leqq a'$, $b \leqq y \leqq b'$ (n° **154**).

La fonction $f(x, y)$ est continue dans l'ensemble (XY) de ces systèmes, si à chaque nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre positif η tel que l'on ait

$$|f(x', y') - f(x, y)| < \varepsilon$$

sous les conditions

$$|x - x'| < \eta, \qquad |y - y'| < \eta,$$
$$a \leqq x \leqq a', \qquad b \leqq y \leqq b'$$

dont les dernières expriment simplement que le système de nombres x, y appartient à l'ensemble (XY). En supposant toujours vérifiées ces dernières conditions, il reviendrait au même de dire qu'au nombre positif ε on peut faire correspondre deux nombres positifs α, β tels que l'on ait $|f(x', y') - f(x, y)| < \varepsilon$ sous les conditions $|x - x'| < \alpha$, $|y - y'| < \beta$, puisqu'on pourrait prendre le nombre η égal au plus petit des nombres α, β.

Si la fonction $f(x, y)$ est continue dans l'ensemble (XY) précédemment défini, et si l'on attribue à y une valeur fixe y_0, appartenant à l'intervalle (b, b'), il est clair que $f(x, y_0)$ sera une fonction continue de la variable x dans l'intervalle (a, a'). De même si on attribuait à x une valeur fixe x_0 appartenant à l'intervalle (a, a'), $f(x_0, y)$ serait une fonction de y continue dans l'intervalle (b, b') ; mais il ne faudrait pas conclure la continuité de la fonction de deux variables $f(x, y)$ de la continuité de chacune des fonctions

d'une variable $f(x, y_0)$, $f(x_0, y)$, lors même que cette continuité aurait lieu pour toutes les valeurs de x_0, y_0 qui vérifient les conditions $a \leqq x_0 \leqq a'$, $b \leqq y_0 \leqq b'$.

On dira que la fonction $f(x, y)$ est définie pour le système (x_0, y_0) et aux environs de ce système, s'il existe un nombre positif α, tel que la fonction $f(x, y)$ soit définie pour tous les systèmes x, y pour lesquels on a

$$|x - x_0| \leqq \alpha, \qquad |y - y_0| \leqq \alpha.$$

Dans ces conditions, la fonction $f(x)$ est dite continue pour le système x_0, y_0 si, quelque petit que soit le nombre positif ε, on peut lui faire correspondre un nombre positif η tel que l'on ait

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

sous les conditions

$$|x - x_0| \leqq \eta, \qquad |y - y_0| \leqq \eta;$$

le nombre η doit d'ailleurs être inférieur ou égal au nombre α. Il est clair que si la fonction $f(x, y)$ est continue dans l'ensemble (XY) défini plus haut, elle sera continue pour chaque système x, y tel que l'on ait

$$a < x < a', \qquad b < y < b',$$

au sens qu'on vient de dire. On établira plus tard la réciproque.

Revenons aux fonctions d'une variable.

166. — Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle (a, b) et supposons $f(a)$ différent de $f(b)$. Soit C un nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$; je dis qu'il appartient à l'ensemble (Y) des valeurs distinctes de $f(x)$ dans (a, b) ; en d'autres termes, il y a une valeur x_0 de x, qui appartient à l'intervalle (a, b), qui est forcément différente des bornes a, b, et pour laquelle on a $f(x_0) = C$.

Je supposerai, pour fixer le langage, $a < b$ et $f(a) < C < f(b)$. Pour les valeurs de x un peu plus grandes que a, $f(x)$, qui est très voisin de $f(a)$, reste plus petit que C. Il y a donc des nombres α appartenant à l'intervalle (a, b), tels que l'on ait $f(x) < C$ pour

toutes les valeurs de x qui appartiennent à l'intervalle (a, α) : soit (E) l'ensemble des nombres α, ensemble qui est évidemment borné : sa borne supérieure, que je désignerai par x_0 est certainement moindre que b, car, pour $x = b$, on a $f(x) > C$, et il en est de même, en vertu de la continuité, pour les valeurs de x un peu plus petites que b. On a d'ailleurs certainement $f(x_0) = C$: car si l'on avait $f(x_0) < C$, la fonction $f(x)$, pour les valeurs de x un peu plus grandes que x_0 serait encore inférieure à C, et si l'on avait $f(x) > C$, elle serait plus grande que C pour les valeurs de x un peu plus petites que x_0 : dans les deux cas x_0 ne serait pas la borne supérieure de l'ensemble (E).

La proposition que l'on vient de démontrer s'énonce souvent, d'une façon imagée, en disant qu'une fonction continue $f(x)$ ne peut passer d'une valeur $f(a)$ à une autre valeur $f(b)$ sans passer par toutes les valeurs intermédiaires. Elle montre en particulier que si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, l'équation $f(x) = 0$ a une racine comprise entre a et b.

Soient M, m les bornes supérieure et inférieure de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) ; il y a deux nombres a_1, b_1, qui appartiennent à cet intervalle et pour lesquels on a $f(a_1) = M$, $f(b_1) = m$. La proposition précédente s'applique à l'intervalle (a_1, b_1) contenu dans l'intervalle (a, b) : il suit de là que l'ensemble (Y) des valeurs que prend la fonction $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) n'est autre chose que l'intervalle (m, M), puisque, d'une part il n'y a pas de points de (Y) en dehors de cet intervalle, et que, de l'autre, si μ désigne un nombre qui appartienne à l'intervalle (m, M), il y a un nombre x appartenant à l'intervalle (a_1, b_1), donc à l'intervalle (a, b), pour lequel on a $f(x) = \mu$.

L'ensemble (Y) est bien clos, comme on le savait d'ailleurs par le n° **162**.

Si importante que soit la propriété précédente des fonctions continues, elle ne caractérise cependant pas ces fonctions [1].

[1] Voyez le Mémoire de M. Darboux sur les fonctions discontinues, *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 2e sér., t. IV, p. 1091. Il suffira de signaler l'exemple suivant, que donne M. Darboux : une fonction $f(x)$ égale à o pour $x = 0$, et à $\sin \frac{1}{x}$ pour les autres valeurs de x, est discontinue pour $x = 0$; cependant il est aisé de voir qu'elle ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par les valeurs intermédiaires.

La définition des mots « fonction croissante, non décroissante... » qui a été donnée au n° **163** subsiste ainsi que ses conséquences dans le cas où la fonction est définie dans un intervalle (a, b) : En supposant que la fonction $f(x)$ soit non-décroissante ou non-croissante, dans cet intervalle, ses bornes sont $f(a)$ et $f(b)$; si l'on a $f(x') = f(x'')$, en désignant par x', x'' deux nombres de l'intervalle (a, b), la fonction $f(x)$ est constante dans tout l'intervalle (x', x''), etc.

167. — En restant toujours dans le cas où la fonction $f(x)$ est déterminée dans l'intervalle (a, b), on dira qu'elle est *croissante* au point x_0 de cet intervalle si l'on peut déterminer un nombre positif ε, tel que le rapport

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

soit positif pour toutes les valeurs de x, autres que x_0, qui appartiennent à l'intervalle (a, b) et qui satisfont à l'inégalité $|x - x_0| < \varepsilon$.

Une fonction croissante dans l'intervalle (a, b) est croissante en chaque point de cet intervalle ; il est aisé d'établir la réciproque.

Supposons en effet que la fonction $f(x)$ soit croissante en tout point de l'intervalle (a, b), au sens qu'on vient de dire ; il suffit, pour prouver qu'elle est croissante dans l'intervalle (a, b) au sens qui a été précisé au n° **163**, de montrer que si l'on désigne par x' une valeur quelconque appartenant à l'intervalle (a, b), autre que la borne supérieure b, on a $f(x) > f(x')$ pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à l'intervalle (x', b). Or cette inégalité, puisque la fonction $f(x)$ est croissante au point x', a certainement lieu pour les valeurs de x qui sont suffisamment voisines de x'. Soit $(\mathcal{E})$ l'ensemble des valeurs de x, appartenant à l'intervalle (x', b) pour lesquelles on a $f(x) > f(x')$ et x_0 la borne supérieure de $(\mathcal{E})$, je dis, d'une part que l'on a $f(x_0) > f(x')$, d'autre part que x_0 est égal à b. Si en effet on avait $f(x_0) \leqq f(x')$, la fonction $f(x)$, pour des valeurs de x un peu plus petites que x_0 prendrait des valeurs plus petites que $f(x_0)$, puisqu'elle est croissante au point x_0, ces valeurs seraient plus petites que $f(x')$; les valeurs de x un peu plus petites que x_0 n'appartiendraient pas à l'ensemble $(\mathcal{E})$, non

plus que x, qui ne pourrait être la borne supérieure de cet ensemble. On a donc $f(x_0) > f(x)$. D'autre part, si x_0 n'était pas égal à b, pour les valeurs de x un peu plus grandes que x_0, la fonction $f(x)$, croissante en x_0, serait plus grande que $f(x_0)$, les valeurs de x un peu plus grandes que x_0 appartiendraient à l'ensemble ($\mathcal{E}$), dont x_0 ne serait pas la borne supérieure.

On définira de même ce qu'est une fonction décroissante en un point d'un intervalle, et l'on montrera qu'une fonction décroissante en tout point d'un intervalle est décroissante dans tout l'intervalle.

168. — Quand une fonction $f(x)$ est à la fois continue et croissante (ou décroissante) dans un intervalle (a, b), les choses se passent d'une façon particulièrement simple. Rappelons d'abord que si l'on suppose $a < b$ et la fonction $f(x)$ croissante, $A = f(a)$ sera la borne inférieure de cette fonction, $B = f(b)$ sa borne supérieure, $B - A$ son écart dans l'intervalle (a, b). Si maintenant on a $A < C < B$, la fonction $f(x)$ prend, comme on l'a vu au n° **165**, et comme on pourrait le démontrer dans le cas qui nous occupe d'une manière un peu plus simple, la valeur C pour une valeur x_0 comprise entre a et b; elle n'atteint d'ailleurs la valeur C que pour la seule valeur x_0, car pour les valeurs de x inférieures à x_0, $f(x)$ est plus petit que C; au contraire $f(x)$ est plus grand que C pour les valeurs de x plus grandes que x_0. Dans ce cas la correspondance entre les éléments de l'ensemble (Y) des valeurs de la fonction $f(x)$, et de l'ensemble (X) des valeurs de (x) [ou de l'intervalle (a, b)], est parfaite.

Il ne sera pas inutile de remarquer en général que, toutes les fois qu'une fonction $y = f(x)$ est déterminée dans un ensemble (X) et que les valeurs de y qui correspondent à deux valeurs distinctes de x prises dans cet ensemble sont toujours distinctes, en sorte que la correspondance entre les valeurs de x [les éléments de (X)], et les valeurs de y [les éléments de (Y)] soit parfaite, la valeur de x à laquelle correspond une valeur de y de l'ensemble (Y) est déterminée sans ambiguïté, en sorte que x peut être regardé comme une fonction de y déterminée dans (Y); cette fonction $F(y)$ est dite la fonction inverse de la fonction $f(x)$, et l'on a pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à (X), et pour toutes les valeurs de y qui appartiennent à (Y),

$$x = F[f(x)], \qquad y = f[F(y)].$$

169. — Dans le cas qui nous occupe, où la fonction $y = f(x)$ est continue et croissante dans l'intervalle (a, b), la fonction inverse $F(y)$ est définie dans l'intervalle (A, B) ; il est aisé de voir qu'elle y est croissante et continue : elle y est croissante, car si l'on a $A < y' < y'' < B$, et si l'on suppose $x' = F(y')$, $x'' = F(y'')$ ou, ce qui revient au même, $y' = f(x')$, $y'' = f(x'')$, il est clair que l'on ne peut avoir ni l'égalité $x' = x''$, qui impliquerait $f(x') = f(x'')$, ni l'inégalité $x' > x''$, qui impliquerait $f(x') > f(x'')$. Enfin la fonction $F(y)$ est continue pour toute valeur y' comprise entre A et B. Car, si l'on suppose encore $x' = F(y')$, $y' = f(x')$ et si l'on veut déterminer un intervalle $(y' - \eta, y' + \eta)$ tel que pour les valeurs de y appartenant à cet intervalle, la différence $F(y') - F(y)$ soit moindre en valeur absolue que le nombre positif ε, dont on suppose seulement qu'il satisfait aux conditions $a \leqq x' - \varepsilon < x' + \varepsilon \leqq b$, il suffira de poser

$$y' - h = f(x' - \varepsilon), \qquad y' + k = f(x' + \varepsilon),$$

et de prendre η plus petit que les deux nombres positifs h, k. En effet, pour les valeurs de x comprises entre x' et $x' + \varepsilon$ y est compris entre y' et $y' + k$; inversement, quand y est compris entre y' et $y' + k$, $F(y)$ est compris entre x' et $x' + \varepsilon$; on a donc $0 < F(y) - F(y') < \varepsilon$. De même quand y est compris entre $y' - h$ et y', on a $0 < F(y') - F(y) < \varepsilon$. Dans tous les cas, si y est compris entre $y' - \eta$ et $y' + \eta$ on aura certainement $|F(y) - F(y')| < \varepsilon$. Les modifications qu'il faudrait apporter à cette démonstration si y était égal à A ou à B sont insignifiantes.

Si la fonction $y = f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b), et si m, M sont ses bornes inférieure et supérieure, la correspondance entre l'intervalle (a, b) des valeurs de x et l'intervalle (m, M) des valeurs de y ne peut être parfaite que si la fonction $f(x)$ est croissante, ou décroissante, dans tout l'intervalle.

Supposons en effet que la correspondance soit parfaite et soient $\alpha < \beta < \gamma$ trois nombres appartenant à l'intervalle (a, b) : d'une part les nombres $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\gamma)$ sont distincts, en vertu de l'hypothèse ; d'autre part $f(\beta)$ est certainement compris entre $f(\alpha)$ et $f(\gamma)$. Car, s'il en était autrement, c'est que $f(\alpha)$ serait compris entre $f(\beta)$ et $f(\gamma)$ ou que $f(\gamma)$ serait compris entre $f(\alpha)$ et $f(\beta)$; dans le premier cas, $f(\alpha) - f(\beta)$, et $f(\alpha) - f(\gamma)$ seraient de

signes contraires : l'équation $f(\alpha) - f(x) = 0$ aurait donc une racine δ comprise entre β et γ : or la supposition $f(\alpha) = f(\delta)$, est contraire à l'hypothèse faite sur la fonction (fx) qui, pour des valeurs distinctes de la variable doit prendre des valeurs distinctes ; le raisonnement et la conclusion sont les mêmes dans le second cas.

Par conséquent, quand la fonction $y = f(x)$, continue dans l'intervalle (a, b) n'est pas croissante, ou décroissante, dans tout l'intervalle, la correspondance entre les valeurs de x et celles de y ne suffit pas pour définir x comme une fonction inverse de y : cette définition exige qu'on spécifie, lorsqu'il y a plusieurs valeurs de x qui font acquérir à la fonction $f(x)$ la valeur y, celle que l'on choisit.

Enfin, il convient d'avertir le lecteur que l'opinion qui résulte naturellement de l'étude des fonctions élémentaires et d'après laquelle, lorsqu'une fonction est continue dans un intervalle (a, b), on pourrait partager cet intervalle en intervalles partiels tels que dans chacun d'eux la fonction fût ou croissante, ou décroissante, ou constante, n'est pas vraie. On donnera plus tard un exemple de fonction continue qui n'est ni croissante, ni décroissante en aucun point.

170. — Les propositions qui suivent sont à peu près évidentes ; elles peuvent être regardées comme des extensions de celles du n° **54**, qui subsistent avec l'extension qui a été donnée au sens du mot limite (n° **151**).

Si les deux fonctions $f(x)$, $g(x)$ sont continues en un point, dans un ensemble clos, ou dans un intervalle, il en est de même des fonctions $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \times g(x)$; il en est de même encore de la fonction $\frac{f(x)}{g(x)}$ pourvu que la fonction $g(x)$, pour les valeurs considérées de x, reste supérieure en valeur absolue à un nombre positif fixe. C'est ce qui arrivera sûrement s'il s'agit d'une fonction, continue dans un ensemble clos (X) qui ne s'annule pour aucune valeur de x appartenant à cet ensemble : car si la fonction $g(x)$ est continue dans (X), il en est de même de la fonction $|g(x)|$, qui doit atteindre par conséquent sa borne inférieure, et celle-ci ne peut être nulle, puisque la fonction $g(x)$ ne s'annule pour aucune valeur de x appartenant à (X).

En appliquant plusieurs fois les propositions relatives à une somme et à un produit, on voit que, si $\varphi(u, v, w)$ désigne un polynome en u, v, w et si u, v, w sont des fonctions continues de x dans un ensemble clos (X), $\varphi(u, v, w)$ sera une fonction continue de x dans le même ensemble. Il en serait de même du quotient de deux polynomes en u, v, w, pourvu que le dénominateur ne s'annulât pour aucune valeur de x appartenant à (X). En particulier, un polynome en x est une fonction continue dans tout intervalle ; une fraction rationnelle en x est une fonction continue de x dans tout intervalle qui ne contient aucune valeur de x pour laquelle s'annule le dénominateur.

Soit $\varphi(u)$ une fonction continue de la variable u dans l'intervalle (a, a') et $\psi(v)$ une fonction continue de la variable v dans l'intervalle (b, b'), il est clair que les expressions

$$\varphi(u) + \psi(v), \qquad \varphi(u) \times \psi(v)$$

seront des fonctions des deux variables u, v déterminées dans l'ensemble (UV) des couples de valeurs u, v qui vérifient les conditions

$$a \leq u \leq a', \qquad b \leq v \leq b'$$

(n° **164**) ; il est bien aisé de voir qu'elle sont continues dans cet ensemble. Considérons en effet la seconde, par exemple.

Si l'on pose $\varphi(u') = \varphi(u) + h$, $\psi(v') = \psi(k) + k$, on aura $\varphi(u')\psi(v') - \varphi(u)\psi(v) = h\psi(v) + k\varphi(u) + hk$.

Si l'on désigne par P un nombre positif plus grand que les bornes supérieures des fonctions $|\psi(u)|$, $|\psi(v)|$ dans les intervalles (a, a'), (b, b'), par α un nombre supérieur à $|h|$, $|k|$, si l'on suppose enfin que ces dernières quantités soient moindres que 1, le second membre de l'inégalité précédente sera moindre, en valeur absolue que $(2P + 1)\alpha$; il suffira donc de supposer

$$\alpha < \frac{\varepsilon}{2P + 1}, \qquad |u' - u| \leq \alpha, \quad |v' - v| \leq \alpha$$

pour être sûr que l'on a

$$|\varphi(u')\psi(v') - \varphi(u)\psi(v)| \leq \varepsilon.$$

En appliquant plusieurs fois ce théorème, on voit de suite qu'un

polynome en $\varphi(u)$, $\psi(v)$ est une fonction continue dans l'ensemble (UV). En particulier, un polynome en u, v sera une fonction continue dans l'ensemble (UV) et cela quels que soient les nombres a, a', b, b' ; l'extension de ces propriétés à des fonctions de trois, quatre, ... variables est immédiate.

Si les fonctions $f(x)$, $g(x)$ sont croissantes dans l'intervalle (a, b), il en est de même de la fonction $f(x) + g(x)$; il en est de même encore de la fonction $f(x) \times g(x)$, si les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ restent positives dans cet intervalle ; le produit $f(x) \times g(x)$ serait décroissant si les deux facteurs étaient croissants et négatifs, on ne peut rien affirmer si l'un des facteurs est positif et l'autre négatif. Si la fonction $f(x)$ est croissante et la fonction $g(x)$ décroissante, la différence $f(x) - g(x)$ est croissante ; il en est de même de la fonction $\frac{f(x)}{g(x)}$, quand les deux fonctions $f(x)$, $g(x)$ restent positives ; elle est, au contraire, décroissante, quand les deux fonctions $f(x)$, $g(x)$ restent négatives. Le lecteur complètera sans peine les énoncés de ce genre.

171. — Soit $f(x)$ une fonction de x définie dans l'intervalle (a, b) et dont les valeurs restent comprises entre A et B ; si $\varphi(y)$ est une fonction de y, définie dans l'intervalle (A, B), il est clair qu'à chaque valeur de x appartenant à l'intervalle (a, b) correspondra une valeur de $\varphi(y)$ obtenue en regardant y comme ayant la valeur $f(x)$; à ce point de vue $\varphi(y)$ ou $\varphi[f(x)]$ est ce qu'on appelle une fonction de fonction de x. Si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b) et si la fonction (de y) $\varphi(y)$ est continue dans l'intervalle (A, B), il est clair que la fonction $\varphi[f(x)]$ sera une fonction continue dans l'intervalle (a, b) ; si la fonction $f(x)$ est croissante dans l'intervalle (a, b) et si la fonction (de y) $\varphi(y)$ est croissante dans l'intervalle (A, B), il est clair que la fonction $\varphi[f(x)]$ est croissante dans l'intervalle (a, b). Plus généralement si l'on sait partager l'intervalle (a, b) en intervalles partiels tels que, dans chacun d'eux, la fonction $f(x)$ soit croissante ou décroissante, et l'ensemble (A, B) en intervalles partiels tels que la fonction $\varphi(y)$ soit croissante ou décroissante, on parviendra à partager l'intervalle (a, b) en intervalles partiels tels que dans chacun d'eux on connaisse le sens de la variation, c'est-à-dire le caractère de

croissance ou de décroissance de la fonction de fonction $\varphi[f(x)]$.

Ce sont les remarques précédentes qui, comme on le sait, permettent de reconnaître le sens de la variation des fonctions

$$ax+b, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{ax+b}{a'x+b'} = \frac{a}{a'} + \frac{\frac{ba'-b'a}{a'^2}}{x+\frac{b'}{a'}},$$

$$x-\frac{a^2}{x}, \quad x^m, \quad ax^2+2bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{ac-b^2}{a^2}\right],$$

où a, b, c, a', b' désignent des constantes, m un nombre entier ; on pourra aussi, soit avec ces fonctions mêmes, soit avec d'autres, pour lesquelles on connaît le sens de la variation, former des fonctions de fonction et multiplier les exemples. Mais on sent combien l'application de ces remarques est limitée ; elles ne s'appliquent déjà plus à la fonction très simple $x+\frac{a^2}{x}$, dont il est d'ailleurs aisé de reconnaître le caractère en recourant à la définition des fonctions croissantes ou décroissantes. Des propositions générales qui seront développées plus tard, fourniront des méthodes simples pour reconnaître le sens de la variation d'un très grand nombre de fonctions.

172. — Soit (X) un ensemble de nombres ; soient a et b deux éléments de cet ensemble, a étant le plus petit : cette façon de parler « x croît de a à b en restant dans l'ensemble (X) » ne présente aucune difficulté quand il n'y a entre a et b qu'un nombre fini de valeurs distinctes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de l'ensemble (X) qui sont comprises entre a et b ; on imaginera la suite des nombres croissants $a, x_1, x_2, \ldots, x_n, b$ et on imaginera que la variable x prenne successivement ces valeurs : Lorsqu'il y a une infinité de nombres appartenant à (X) entre a et b, lorsque l'ensemble (X) contient tout l'ensemble (a, b), l'esprit se refuse à concevoir une lettre x prenant successivement toutes les valeurs intermédiaires à a, b.

Même dans ce dernier cas, où l'on dit habituellement que x croît *d'une façon continue* de a à b, il n'y a aucun inconvénient à conserver cette façon de parler, qui est commode, et qui, au fond, n'implique rien de plus qu'un *ordre* attribué aux nombres a, b et

aux nombres intermédiaires, le nombre x' étant regardé comme précédant le nombre x'' si l'on a $x' < x''$. Les façons de parler « x croît de a à $+\infty$, décroît de $+\infty$ à a, croît de $-\infty$ à $+\infty$ » peuvent être l'objet d'observations analogues.

Si maintenant $y = f(x)$ est une fonction continue de x, l'expression « quand x croît d'une façon continue de a à b, y croît d'une façon continue de A à B » s'explique d'elle-même : elle veut dire que l'on a

$$a < b, \qquad A < B, \qquad A = f(a), \qquad B = f(b),$$

et que dans l'intervalle (a, b) la fonction continue $f(x)$ est croissante. Les expressions analogues s'expliqueront de même : par exemple l'expression « quand x croît d'une façon continue de a à b, y décroît d'une façon continue de A à $-\infty$ », veut dire que l'on a $a < b$, $A = f(a)$, que la fonction $f(x)$ est continue et décroissante dans tout intervalle (a, b') où l'on suppose $a < b' < b$, et que l'on a $\lim\limits_{x=b} f(x) = -\infty$. Souvent même, quand il n'y a pas d'ambiguité à craindre, on supprime les mots « d'une façon continue ».

Toutes ces façons de parler sont les résidus d'images où le mouvement joue un rôle sur lequel il me parait inutile d'insister : l'emploi de ces images n'offre pas d'inconvénient quand la signification des notions abstraites auxquelles elles correspondent a été bien précisée.

On peut en dire autant des figures géométriques, qui servent à représenter la variation des fonctions. Dans ce qui précède, un nombre a été essentiellement identifié avec un point sur un axe : cette identification, ainsi qu'on l'a expliqué, peut être regardée comme une simple façon de parler : en disant un point, on entend un nombre, et l'esprit est en même temps soulagé par la vue ou le souvenir d'une image. On n'a d'ailleurs jamais parlé du *plan*, de points en dehors de l'axe qui servait à représenter les nombres. Je m'efforcerai de montrer ultérieurement comment, en conservant le langage de la géométrie plane, en s'aidant même de ses figures, on peut cependant rester dans le domaine du pur nombre. Il n'y a pas d'inconvénient, pour le moment, à attribuer une réalité concrète à la représentation dont on va dire deux mots, et à admettre comme

des données quelques notions et propositions simples de la géométrie élémentaire.

Concevons dans un plan deux axes rectangulaires OX, OY, se coupant au point O (origine des abcisisses et des ordonnées). Sur le premier axe (axe des x, ou des abcisisses), on regarde comme positive la direction qui part du point O et va vers la droite ; sur le second axe (axe des y ou des ordonnées), la direction qui part du point O et va vers le haut. Sur les deux axes on évalue les longueurs au moyen d'une même unité de longueur. Les nombres x seront représentés, suivant la convention ordinaire par des points sur l'axe OX, points dont les nombres sont les abcisses. Pour l'axe OY, on emploie le mot *ordonnée* avec le même sens que le mot abscisse pour l'axe OX ; les nombres y sont représentés par des points sur cet axe OY, points dont ces nombres sont les ordonnées.

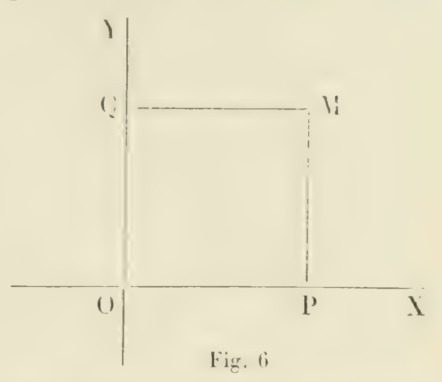


Fig. 6

A un point quelconque M du plan correspondent deux points P, Q, ses projections orthogonales sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées, et par conséquent deux nombres x, y, l'abscisse du point P, et l'ordonnée du point Q, qui sont dits aussi l'abscisse et l'ordonnée, ou les coordonnées du point M ; réciproquement à chaque système de deux nombres (x, y) correspond un point M dont l'abscisse et l'ordonnée sont précisément x, y.

Ceci posé, si l'on considère une fonction $y = f(x)$, elle fait correspondre à un point x de l'axe des abscisses un point y de l'axe des ordonnées, et cette correspondance sera très bien figurée par le point M dont les coordonnées sont x, y ; On dit que l'ensemble (ou le lieu) des points M représente la fonction $f(x)$, ou l'équation $y = f(x)$. A la vérité, cette représentation est, à peu près inapplicable quand il s'agit de correspondances aussi générales que celles que l'on a considérées au début de ce chapitre ; si même il s'agit d'une fonction continue dans un intervalle (a, b), cette représentation ne pourra être employée pour une fonction qui, par exemple, ne

serait jamais croissante, ni décroissante. Elle commence à devenir moins confuse quand l'intervalle (a, b) peut être décomposé en un nombre fini d'intervalles dans chacun desquels la fonction est croissante ou décroissante : si, par exemple, la fonction $y = f(x)$ est croissante dans l'intervalle (a, b), on est disposé à ne pas refuser le nom de *courbe* au lieu des points M qui figurent la correspondance entre x et y quand x croît de a à b ; en réalité les images que nous nous représentons sous le nom de courbes impliquent, d'une façon plus ou moins obscure, des propriétés qui peuvent très bien n'être pas réalisées ici, par exemple l'existence d'une tangente, au moins en général, et d'une certaine continuité dans la variation de cette tangente ; bien qu'il convienne de réserver le nom de courbe aux lieux géométriques qui jouissent de ces propriétés, que l'on précisera plus tard, employons-le provisoirement, et figurons un trait de courbe montant du point α dont les coordonnées sont a, A au point β dont les coordonnées sont b, B ; il figurera une fonction $f(x)$, continue dans l'intervalle (a, b) et croissant de la valeur A à la valeur B quand x croît de a en b ; on voit très bien sur la figure comment à un point c de l'intervalle (a, b) correspond un point C de l'intervalle (A, B) et réciproquement ; en d'autres termes ; comment la correspondance entre les intervalles (a, b) et (A, B) est parfaite ; comment, lorsque le point c se meut sur l'axe des abscisses de a vers b, en allant toujours de gauche à droite, le point correspondant C de l'axe des ordonnées monte de A et B et réciproquement ; comment, en quelque sorte, le trait de courbe entre α, β définit à la fois y comme fonction de x $[y = f(x)]$ dans l'intervalle (a, b) et x comme fonction inverse de y $[x = \mathrm{F}(y)]$ dans l'intervalle (A, B) ; comment cette dernière fonction est croissante. La continuité de la fonction $\mathrm{F}(y)$ s'aperçoit par un raisonnement identique au fond à celui du n° **169**, mais qui, sur la figure, devient intuitif : si l'on marque deux points c', c'' sur l'axe des x, à droite et à gauche de c et à une même distance ε de ce point, puis que l'on figure les points correspondants C′, C″ de l'axe de y, il est clair que si l'on prend le point M entre C′, C″ le point correspondant m de l'axe des x sera entre c' et c'' et par suite à une distance de c moindre que ε ; or le point M sera sûrement entre les deux points C′ et C″ si on lui impose la condition d'être à une distance du point C moindre que la distance η de ce point à celui des

deux points C′ et C″ qui est le plus rapproché de ce point C, en sorte que, si l'on désigne par x_0, y_0 l'abscisse du point c et l'ordonnée du point C, ou les coordonnées du point γ, par x, y l'abcisse du point m et l'ordonnée du point M, ou les coordonnées du point μ, on est sûr que la différence $F(y) - F(y_0)$ ou $x - x_0$, est moindre en valeur absolue que ε, si la distance $|\,y - y_0\,|$ est moindre que η. On reconnait assez que, dans ce raisonnement, la figure n'a été qu'une aide ; l'apparence seule est géométrique ; toutes les parties de la démonstration du n° **169** ont été introduites dans un autre langage, dont la commodité est évidente.

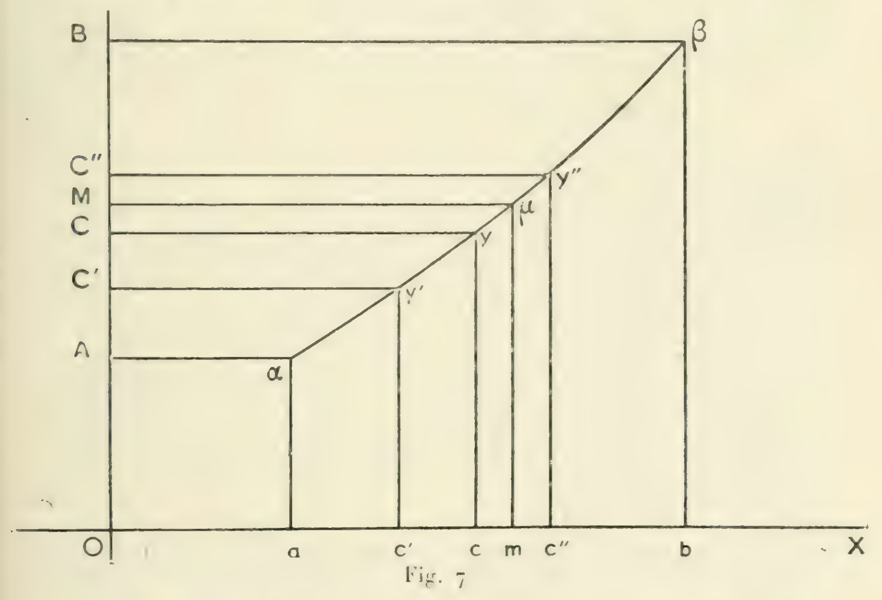


Fig. 7

J'aurai besoin plus tard des résultats suivants, qu'il suffira d'énoncer :

Les fonctions $y = ax$, $y = ax + b$, où a, b sont des constantes, sont représentées, dans le système qu'on vient d'expliquer, par deux droites parallèles dont la première passe par l'origine : a est le coefficient angulaire de l'une ou l'autre droite ; c'est l'ordonnée du point de la première droite dont l'abscisse est 1 ; b est l'ordonnée à l'origine de la seconde droite. Réciproquement, à toute droite non parallèle à l'axe des y correspond une fonction $ax + b$ que représente cette droite au sens précédent ; en d'autres termes, toute droite non parallèle à l'axe des y a une équation de la forme

$y = ax + b$. Le coefficient angulaire de la droite qui passe par les points dont les coordonnées sont x', y' et x'', y'' est $\frac{y''-y'}{x''-x'}$ et l'équation de cette droite est $y - y' = \frac{y''-y'}{x''-x'}(x - x')$: en d'autres termes $\frac{y''-y'}{x''-x'}x + \frac{y'x''-y''x'}{x''-x'}$ est la seule fonction de la forme $ax + b$ qui prenne pour $x = x'$ et $x = x''$ les valeurs y', y''.

Après cette digression, revenons à l'étude des fonctions, non plus, en ce moment, pour développer des notions générales, mais bien pour étudier des fonctions particulières de forme donnée.

II. — POLYNOMES EN x. FONCTIONS a^x, $\log x$, x^m.

173. — Remarquons d'abord que l'on peut toujours ramener l'étude d'une fonction $f(x)$, aux environs d'une valeur x_0 qui fait partie d'un intervalle où la fonction est définie, au cas où cette valeur est nulle ; il suffira pour cela de poser $x = x_0 + h$, de regarder h comme la variable et d'étudier la fonction $f(x_0 + h)$ pour les petites valeurs de cette variable. Je vais rappeler rapidement les résultats que cette méthode fournit quand on l'applique aux polynomes en x et aux fonctions rationnelles ; la continuité de ces fonctions a été établie au nº **170** ; on va retrouver cette propriété et quelques autres.

Quant il s'agit d'étudier un polynome en x pour les petites valeurs de x, il convient d'écrire ce polynome ordonné par rapport aux puissances croissantes de la variable sous une forme telle que

$$A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_nx^n ;$$

chaque terme, en effet, pour les petites valeurs de x, est petit par rapport à celui qui le précède, en sorte que pour de telles valeurs, on obtient des expressions de plus en plus approchées pour la valeur du polynome en prenant un, deux, trois, ... termes ; c'est d'ailleurs ce que l'on va préciser tout à l'heure. Observons encore que, si l'on suppose $|x| \leq 1$, la valeur absolue du polynome sera inférieure ou au plus égale à la somme des valeurs absolues de ses coefficients.

Supposons d'abord que le polynome s'annule pour $x = 0$, c'est-à-dire qu'il manque au commencement certains coefficients ; on l'écrira, en supposant que le premier terme qui ne manque pas soit du degré $p \leqq n$,

$$A_p x^p + A_{p+1} x^{p+1} + \ldots + A_n x^n.$$

Si l'on désigne par x' la valeur absolue de x et par S la somme des valeurs absolues de A_p, A_{p+1}, ..., A_n, et si l'on suppose $x' < 1$, la valeur absolue du polynome sera au plus égale à Sx'^p, et cette valeur absolue sera moindre que ε si l'on suppose $x' < \sqrt[p]{\frac{\varepsilon}{S}}$; la continuité du polynome pour $x = 0$ est évidente. On peut d'ailleurs écrire le polynome sous la forme $A_p x^p [1 + \varphi(x)]$, en posant

$$\varphi(x) = \frac{A_{p+1}}{A_p} x + \frac{A_{p+2}}{A_p} x^2 + \ldots + \frac{A_n}{A_p} x^{n-p} ;$$

$\varphi(x)$ est encore un polynome qui s'annule pour $x = 0$; pour les valeurs de x moindres en valeur absolue qu'une limite que l'on vient d'apprendre à fixer, le polynome reste moindre que 1 en valeur absolue, et par conséquent le polynome proposé $A_p x^p [1 + \varphi(x)]$ ne s'annule que pour la seule valeur $x = 0$; pour les autres valeurs de x, moindres toutefois, en valeur absolue, que la limite dont on vient de parler, le polynome est du signe de son premier terme $A_p x^p$; lorsque p est impair, il est, pour $x = 0$, croissant ou décroissant suivant que A_p est positif ou négatif ; lorsque p est pair, le polynome, pour $x = 0$, est plus petit que pour les valeurs voisines de x, positives ou négatives, si A_p est positif, plus grand au contraire si A_p est négatif ; dans le premier cas on dit que, pour $x = 0$, il passe par un minimum, dans le second, par un maximum. Ces résultats s'appliquent immédiatement à un polynome dans lequel le premier coefficient A_0 n'est pas nul, puisqu'on peut alors l'écrire $A_0 + \psi(x)$, $\psi(x)$ étant un polynome qui s'annule pour $x = 0$; le polynome $A_0 + \psi(x)$ est égal à A_0 pour $x = 0$; pour des valeurs de x suffisamment voisines de 0, il est très voisin de A_0 et ne peut être nul ; enfin le premier terme de $\psi(x)$ qui n'est pas nul, permet de reconnaître si le polynome $A_0 + \psi(x)$ est croissant pour $x = 0$, ou décroissant, s'il passe par un minimum ou un maximum. On voit qu'un polynome dont tous les coefficients ne sont pas nuls, ne peut s'annuler pour les

petites valeurs de x, sauf pour $x = 0$, quand son premier terme manque, qu'un polynome, dont tous les coefficients ne sont pas nuls, ne peut s'annuler pour une suite de valeurs distinctes de x qui auraient 0 pour limite, et, puisque la différence de deux polynomes est un polynome, que deux polynomes ne peuvent prendre des valeurs égales pour une telle suite de valeurs de x, sans être identiques terme à terme.

Il importe de remarquer que ces diverses propriétés ne s'appliquent pas aux seuls polynomes. En effet, l'hypothèse que le dernier coefficient A_n est une constante n'intervient à peu près pas, et les conclusions précédentes à peine modifiées s'appliquent aux fonctions $f(x)$ qui, en désignant par α un nombre positif que l'on supposera sans inconvénient inférieur à 1, peuvent, pour l'ensemble des valeurs de x appartenant à l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$ être mises sous la forme

$$f(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_{n-1} x^{n-1} + A_n x^n$$

où $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ sont des constantes et où A_n est une fonction de x dont on sait seulement qu'elle est bornée dans l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$. On ne considérera que des valeurs de x qui appartiennent à cet intervalle ; on regardera S comme la somme des valeurs absolues de $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ et de la borne supérieure des valeurs absolues de A_n dans l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$, et les raisonnements précédents conduiront aux conclusions que voici :

La fonction $f(x)$ est continue pour $x = 0$. Si l'un des coefficients constants $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ n'est pas nul, cette fonction ne peut s'annuler pour un ensemble de valeurs de x admettant 0 pour point d'accumulation. Si l'un des coefficients constants $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ n'est pas nul, le premier de ces coefficients qui n'est pas nul permettra de reconnaître si, pour $x = 0$, la fonction $f(x)$ est croissante ou décroissante, ou si elle admet un minimum ou un maximum. Le nombre naturel n étant donné, une fonction donnée de x ne peut être mise que d'une seule façon sous la forme précédente, c'est-à-dire que, si l'on a, pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$

$$A_0 + A_1 x + \ldots + A_{n-1} x^{n-1} + A_n x^n = B_0 + B_1 x + \ldots + B_{n-1} x^{n-1} + B_n x^n,$$

$B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$ étant constants comme $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$, B_n étant

comme A_n une fonction de x bornée dans l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$, on a nécessairement

$$A_0 = B_0, A_1 = B_1, \ldots, A_{n-1} = B_{n-1}$$

et B_n est la même fonction de x que A_n.

Enfin ce que l'on a dit des polynomes s'applique encore à ces fonctions : les polynomes

$$A_0, \quad A_0 + A_1x, \quad A_0 + A_1x + A_2x^2, \ldots$$

fournissent, pour les petites valeurs de x, des valeurs approchées de $f(x)$: si l'on prend, par exemple, la dernière, l'erreur commise en la prenant pour $f(x)$ sera moindre que $S'x^3$, en désignant par S' la somme des valeurs absolues de $A_3, A_4, \ldots A_{n-1}$ et de la borne supérieure des valeurs absolues de A_n ; cette erreur sera très petite si x est très petit en valeur absolue ; si le dernier terme conservé A_2x^2 n'est pas nul, elle sera *infiniment petite* par rapport à lui, c'est-à-dire que la limite pour $x = 0$ du rapport $\frac{S'x^3}{A_2x^2} = \frac{S'}{A_2}x$ sera nulle.

Quand x est très grand en valeur absolue, il convient d'ordonner le polynome que l'on étudie par rapport aux puissances décroissantes de la variable et de l'écrire

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n;$$

ce sont alors les premiers termes qui importent ; en négligeant les termes qui les suivent l'erreur *relative* que l'on commet est très petite. Ce polynome peut s'écrire aussi

$$A_nx^n[1 + \varphi(z)]$$

en posant $z = \frac{1}{x}$ et en désignant par $\varphi(z)$ un polynome en z qui s'annule pour $z = 0$; si x est très grand en valeur absolue, z est très petit en valeur absolue : alors $\varphi(z)$ est très petit en valeur absolue : on reconnaît aisément que lorsque x est très grand en valeur absolue, un polynome est du signe de son premier terme et que sa valeur absolue grandit indéfiniment quand la valeur absolue de x grandit indéfiniment. Il est clair que ces dernières

conclusions s'appliquent à toutes les fonctions qui peuvent être mises sous la forme

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n,$$

pourvu que le premier coefficient a_0 soit une constante non nulle et que $a_1, a_2, \dots, a_n$ soient des fonctions de x qui restent, en valeur absolue, moindres que des nombres positifs fixes, quand x est très grand en valeur absolue.

Le fait qu'un polynome ne peut être nul pour toutes les valeurs de x sans être identiquement nul, que deux polynomes ne peuvent prendre les mêmes valeurs pour toutes les valeurs de x sans être identiques, apparaît aussi bien sur les grandes valeurs de x que sur les petites. Cette propriété des polynomes à une variable s'étend sans difficulté, par voie d'induction, aux polynomes à deux, trois, ... variables. Un polynome à n variables, dans lequel on a réduit entre eux les termes semblables, ne peut être nul pour toutes les valeurs de ces variables sans que tous ses coefficients soient nuls.

Supposons maintenant qu'on veuille étudier un polynome

$$f(x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n$$

aux environs d'une valeur donnée x_0 de la variable ; on posera comme on l'a expliqué, $x = x_0 + h$, et l'on étudiera, pour les valeurs de la variable voisines de o, la fonction de h,

$$f(x_0 + h) = A_0 + A_1(x_0 + h) + A_2(x_0 + h)^2 + \dots + A_n(x_0 + h)^n;$$

cette fonction est un polynome en h que l'on ordonnera suivant les puissances croissantes de h

$$f(x_0 + h) = P_0 + P_1 h + P_2 h^2 + \dots,$$

et l'on appliquera à ce polynome en h les conclusions précédentes ; elles impliquent la continuité du polynome pour $x = x_0$ et donnent le moyen de reconnaître si la fonction $f(x)$ est croissante ou décroissante pour $x = x_0$, si elle passe par un maximum ou un minimum, suivant la parité et le signe du premier terme (autre que P_0) qui n'est pas nul.

Les expressions

$$P_0,\ P_0 + P_1(x - x_0),\ P_0 + P_1(x - x_0) + P_2(x - x_0)^2,\ \dots$$

sont des expressions approchées de $f(x)$ pour les valeurs de x voisines de x_0.

Si la fonction $f(x)$ s'annule pour $x = x_0$, c'est que P_0 est nul ; supposons que les coefficients $P_0, P_1, \dots P_{r-1}$ soient nuls et que P_r soit différent de o. (Le dernier coefficient P_n, qui est égal à A_n, ne peut être nul). On aura alors

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= P_r h^r + P_{r+1} h^{r+1} + \dots + P_n h^n \\ &= h^r [P_r + P_{r+1} h + \dots + P_n h^{n-r}], \\ f(x) &= (x - x_0)^r [P_r + P_{r+1}(x - x_0) + \dots + P_n (x - x_0)^{n-r}] ; \end{aligned}$$

on dit alors que x_0 est une racine d'ordre de multiplicité r ; c'est une racine simple, si r est égal à 1 ; $f(x)$ est divisible par $(x - x_0)^r$, sans être divisible par $(x - x_0)^{r+1}$, et cette propriété caractérise évidemment les racines d'ordre de multiplicité égal à r ; le quotient est un polynome en x d'ordre $n - r$, qui, sauf x_0, admet les mêmes racines que $f(x)$, au même degré de multiplicité, comme on le voit de suite. De là résulte immédiatement la proposition suivante : Si le polynome $f(x)$, de degré n, admet les racines distinctes $a, b, \dots, l$ avec les degrés de multiplicité $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ et n'admet pas d'autres racines, on peut le mettre sous la forme

$$f(x) = (x - a)^\alpha (x - b)^\beta \dots (x - l)^\lambda \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant un polynome de degré $n - \alpha - \beta - \dots - \lambda$, qui ne s'annule pour aucune valeur de x, et se réduit à une constante, si l'on a $\alpha + \beta + \dots + \lambda = n$. La somme des ordres de multiplicité, et par suite, le nombre des racines distinctes de $f(x)$ ne peut dépasser n.

En supposant toujours

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n,$$

reprenons l'identité

$$f(x + h) = P_0 + P_1 h + P_2 h^2 + \dots + P_n h^n,$$

(où j'écris maintenant x à la place de x_0) ; le second membre est ordonné suivant les puissances de h ; les coefficients $P_0, P_1, P_2, \dots$

de ce polynome en h sont des polynomes en x. Les raisonnements précédents montrent l'importance des premiers de ces coefficients pour l'étude du polynome dans le voisinage d'une valeur donnée de x. Le premier coefficient P_0 est évidemment égal à $f(x)$, comme on le voit en faisant $h = 0$ dans l'identité précédente, ou en commençant à développer l'expression

$$A_0 + A_1(x+h) + A_2(x+h)^2 + \ldots + A_n(x+h)^n;$$

le même calcul montre de suite que les coefficients de h est

$$P_1 = A_1 + 2A_2x + 3A_3x^2 + \ldots + nA_nx^{n-1};$$

ce polynome, de degré $n-1$, se déduit du polynome $f(x)$ ou P_0 par une règle très facile à retenir et joue un rôle considérable ; on lui donne le nom de dérivée du polynome $f(x)$: c'est une notion qu'on retrouvera plus tard par une autre voie : on représente habituellement ce polynome par $f'(x)$. Il a lui-même une dérivée que l'on représente par $f''(x)$, et qui est

$$f''(x) = 1.2A_2 + 2.3.A_3x + \ldots + (n-1)nA_nx^{n-2};$$

$f''(x)$ s'appelle aussi la dérivée seconde de $f(x)$; la dérivée de $f''(x)$ ou la dérivée troisième de $f(x)$ est

$$f'''(x) = 1.2.3A_3 + 2.3.4A_4x + \ldots + (n-2)(n-1)nA_nx^{n-3};$$

la dérivée p^e de $f(x)$, $(p \leqq n)$ est

$$f^p(x) = 1.2\ldots pA_p + 2.3\ldots(p+1)A_{p+1}x + \ldots$$
$$+ (n-p+1)(n-p+2)\ldots nA_nx^{n-p};$$

la dérivée n^e, ou $f^{(n)}(x)$, se réduit à la constante $1.2.3.\ldots nA_n$. Chacun des polynomes $f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ se déduit du précédent par la même règle [1].

L'expression même des dérivées montre que l'on a

$$A_p = \frac{f^{(p)}(0)}{1.2\ldots p},$$

[1] Il est commode de regarder les dérivées suivantes $f^{(n+1)}(x), f^{(n+2)}(x), \ldots$ comme identiquement nulles.

en désignant par $f^{(p)}(o)$, ce que devient $f^{(p)}(x)$ quand on y remplace x par o, et conduit à la formule suivante

$$f(x) = f(\text{o}) + \frac{x}{1} f'(\text{o}) + \ldots + \frac{x^p}{1.2\ldots p} f^{(p)}(\text{o}) + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(\text{o}).$$

La formule fondamentale

$$(1)\quad f(a+x) = f(a) + \frac{x}{1} f'(a) + \ldots + \frac{x^p}{1.2\ldots p} f^{p}(a) + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} f^{n}(a),$$

où a est un nombre quelconque, ne diffère pas au fond de celle qui précède. Il suffit, pour s'en rendre compte, de remarquer que les dérivées successives du polynome (en x) $f(a+x)$, s'obtiennent en remplaçant x par $a+x$ dans les dérivées $f'(x)$, $f''(x)$, ... du polynome $f(x)$. Or cela résulte de ce que, si dans l'identité

$$f(x+h) = P_0(x) + P_1(x)h + \ldots + P_n(x)h^n,$$

on remplace x par $a+h$, elle devient

$$f(a+x+h) = P_0(a+x) + P_1(a+x)h + \ldots + P_n(a+x)h^n;$$

$P_1(a+x)$ ou $f'(a+x)$, est le coefficient de h dans le développement de $f(a+x+h)$ suivant les puissances de h ; c'est la définition même de la dérivée du polynome $f(a+x)$; la dérivée du polynome $f'(a+x)$ est de même $f''(a+x)$, etc...

La formule (1) appliquée au polynome $f(x) = x^n$, fournit la formule connue sous le nom de formule du binome, laquelle inversement, quand on l'a démontrée directement, permet d'obtenir aisément la formule (1).

Celle-ci montre en particulier que le polynome $P_r(x)$ n'est autre chose que la dérivée r^e de $f(x)$ divisée par le produit des r premiers nombres naturels.

Elle donne aussi l'expression d'un polynome de degré inférieur ou égal à n qui prend, ainsi que ses n dérivées, des valeurs données pour une valeur donnée a de la variable. Si l'on veut que le polynome soit effectivement du degré n, il faut que la valeur donnée de la n^e dérivée ne soit pas nulle ; si les valeurs données des dérivées, à partir de la $(p+1)^e$, étaient nulles, le polynome serait de degré p.

174. — La même méthode que pour les polynomes s'applique aux fractions rationnelles.

On commencera par les étudier pour les valeurs de x voisines de o : soit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots}$$

une telle fonction, dans laquelle le numérateur $f(x)$ et le dénominateur $g(x)$ sont des polynomes en x. Supposons d'abord que $g(x)$ ne soit pas nul pour $x = 0$, c'est-à-dire que b_0 ne soit pas nul ; on pourra, comme on l'a expliqué plus haut, fixer un intervalle $(-\eta, \eta)$ dans lequel on ait $|g(x)| > |b_0| - \varepsilon$, ε étant un nombre positif donné à l'avance ; dans l'intervalle, la fraction sera bornée. Ceci posé, les règles de la division algébrique permettent de la mettre sous la forme

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots c_n x^n,$$

en désignant par $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}$ des constantes, et par c_n une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des polynomes ; le dénominateur est $g(x)$: la fraction c_n est donc bornée dans l'intervalle $(-\eta, \eta)$; dès lors les conclusions du numéro précédent s'appliquent : on voit que la fraction rationnelle est continue pour $x = 0$, et l'on sait reconnaître, pour cette valeur, si elle est croissante ou décroissante, si elle admet un minimum ou un maximum. Les expressions

$$c_0 = \frac{a_0}{b_0}, \quad c_0 + c_1 x, \quad c_0 + c_1 x + c_2 x^2, \dots$$

sont, pour les petites valeurs de x, des expressions approchées de la fraction rationnelle. Il n'est pas inutile, pour le calcul de ces expressions, d'observer que, si l'on veut obtenir l'une d'elles, où x ne figure pas à un degré supérieur à p, on peut, avant de faire la division, négliger au dividende et au diviseur, les termes de degré supérieur à p, qui n'interviennent pas dans la partie du quotient que l'on veut avoir.

Supposons maintenant que b_0 soit nul, et que a_0 soit différent de o ; on pourra mettre $g(x)$ sous la forme $x^r \psi(x)$, en désignant par $\psi(x)$ un polynome qui ne s'annule pas pour $x = 0$, et mettre

la fraction $\frac{f(x)}{\psi(x)}$ sous la forme

$$\frac{f(x)}{\psi(x)} = A_0 + A_1 x + \ldots + A_r x^r + \ldots + A_n x^n$$

en désignant par n un entier dont je suppose seulement qu'il soit supérieur à r, par $A_0, \ldots, A_{n-1}$ des constantes dont la première n'est pas nulle, et par A_n une fraction dont le dénominateur est $\psi(x)$, qui, par conséquent est bornée dans un intervalle convenablement choisi $(-\eta, \eta)$: on en déduira

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_0}{x^r} + \frac{A_1}{x^{r-1}} + \ldots + A_r + \ldots + A_n x^{n-r};$$

la première partie

$$A_0 \frac{1}{x^r} + A_1 \frac{1}{x^{r-1}} + \ldots + A_r$$

est un polynome en $\frac{1}{x}$ qui, pour les petites valeurs de $|x|$, c'est-à-dire pour les grandes valeurs de $\left|\frac{1}{x}\right|$, est une expression approchée de la fonction donnée ; celle-ci est très grande, en valeur absolue, pour les petites valeurs de $|x|$; elle est du signe de son premier terme $\frac{A_0}{x^r}$.

On dit qu'elle est infinie pour $x = 0$. Si r est pair, son signe est le même que celui de A_r; on dit qu'elle passe par $+\infty$, ou par $-\infty$, suivant que A_r est positif ou négatif. Si r est impair, on dit, suivant que A_r est positif ou négatif, et en supposant que x croisse en passant par 0, que la fonction passe de $-\infty$ à $+\infty$, ou de $+\infty$ à $-\infty$.

Il importe de remarquer le rôle que joue le polynome en $\frac{1}{x}$

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{x}\right) = A_0 \frac{1}{x^r} + A_1 \frac{1}{x^{r-1}} + \ldots + A_{r-1} \frac{1}{x}$$

(où l'on n'a pas fait figurer de terme constant) ; c'est, en quelque sorte la partie de la fraction qui devient infinie pour $x = 0$; la différence

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \mathcal{L}\left(\frac{1}{x}\right)$$

admet une limite finie pour $x = 0$, et peut, en lui attribuant cette valeur limite pour *vraie valeur*, être regardée comme continue pour $x = 0$, comme bornée dans un petit intervalle dont o fait partie. D'après les propositions concernant les polynomes, que l'on a établies plus haut, $\mathfrak{f}\left(\frac{1}{x}\right)$ est le seul polynome en $\frac{1}{x}$, s'annulant quand on remplace $\frac{1}{x}$ par o, qui jouisse de cette propriété.

Si enfin $f(x)$ et $g(x)$ s'annulent pour $x = 0$, on mettra ces deux polynomes sous les formes

$$f(x) = x^q\varphi(x), \qquad g(x) = x^r\psi(x),$$

$\varphi(x)$ et $\psi(x)$ ne s'annulant plus pour $x = 0$, et l'on aura

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^q\varphi(x)}{x^r\psi(x)}.$$

Si l'on a $q \geqq r$, on voit que la fraction pourra, pour les valeurs de x voisines de o, se mettre sous la forme

$$\frac{f(x)}{g(x)} = B_0x^{q-r} + B_1x^{q-r+1} + \ldots;$$

Le premier membre de cette égalité n'a plus de sens pour $x = 0$; il est naturel de lui attribuer, même pour cette valeur, le sens du second membre : c'est ce qu'on appelle la *vraie valeur* de la fraction ; elle est o si q est plus grand que r, elle est égale à B_0, c'est-à-dire au rapport des premiers coefficients de $\varphi(x)$ et de $\psi(x)$, si q est égal à r. En adoptant cette convention, on voit que la fraction est continue pour $x = 0$; on sait d'ailleurs reconnaître si elle est croissante ou décroissante.

Si l'on a $q < r$, on mettra la fraction sous la forme

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{B_0}{x^{r-q}} + \frac{B_1}{x^{r-q-1}} + \ldots + \frac{B_{r-q-1}}{x} + \ldots,$$

et l'on aura encore, au commencement du second membre, un polynome en $\frac{1}{x}$, s'annulant quand on y remplace $\frac{1}{x}$ par o, et tel que la différence entre la fraction et ce polynome, puisse être regardée comme une fonction continue de x, pour $x = 0$.

Il convient de remarquer que cette méthode, qui permet d'étudier une fraction rationnelle pour les petites valeurs de x, s'applique au quotient de deux fonctions $f(x)$, $g(x)$ susceptibles, pour les valeurs de x voisines de 0, d'être mises sous une forme pareille à celle d'un polynome, où, toutefois, le coefficient de la plus haute puissance de x, au lieu d'être une constante, est une fonction de x bornée dans un intervalle tel que $(-\eta, \eta)$. Pour obtenir les expressions approchées, on procéderait comme dans le cas des polynomes, en négligeant les termes qui ne doivent pas intervenir dans la formation du quotient partiel dont on a besoin.

Il suffit, pour reconnaître comment une fonction rationnelle se comporte pour les grandes valeurs de x, de poser $x = \frac{1}{z}$; on est alors ramené à l'étude d'une fonction rationnelle de z pour les petites valeurs de z. On voit de suite que si le numérateur de la fraction proposée est de degré inférieur ou égal au dénominateur, la fraction a une *vraie valeur* pour $z = 0$, ou pour $x = \pm\infty$, et que, si le degré du numérateur l'emporte sur le degré du dénominateur, il existe un polynome $\varphi(x)$ tel que $\frac{f(x)}{g(x)} - \varphi(x)$ puisse être regardé comme une fonction continue de z pour $z = 0$: Ce polynome, qui est en quelque sorte la partie de la fraction qui devient infinie avec x, peut être obtenu par la division du polynome $f(x)$ par le polynome $g(x)$, les deux polynomes étant ordonnés suivant les puissances décroissantes de x.

Enfin, si on veut étudier la fraction pour les valeurs de x voisines de x_0, on posera $x = x_0 + h$, et l'on sera ramené à étudier, pour les petites valeurs de h la fraction

$$\frac{f(x_0 + h)}{g(x_0 + h)} = \frac{P_0 + P_1 h + P_2 h^2 + \ldots}{Q_0 + Q_1 h + Q_2 h^2 + \ldots},$$

que l'on traitera comme il a été expliqué. La continuité est évidente, si x_0 n'est pas une racine du dénominateur. Si x_0 est une racine de $g(x)$, la fraction aura une *vraie valeur*, au sens précédemment expliqué, dans le cas où x_0 est aussi racine de $f(x)$ avec un degré de multiplicité égal ou supérieur. Dans le cas où x_0 est d'un ordre de multiplicité plus grand pour $g(x)$ que pour $f(x)$, la fraction est infinie pour $x = x_0$, et l'on peut retrancher du second

membre un polynome en $\frac{1}{h}$ (sans terme indépendant de $\frac{1}{h}$), ou plutôt de la fraction un polynome en $\left(\frac{1}{x - x_0}\right)$, $\mathfrak{L}_0\left(\frac{1}{x - x_0}\right)$, telle que la différence

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \mathfrak{L}_0\left(\frac{1}{x - x_0}\right)$$

puisse être regardée comme une fonction continue ponr $x = x_0$; $\mathfrak{L}_0\left(\frac{1}{x - x_0}\right)$ est la partie de la fraction qui devient infinie pour $x = x_0$.

Cette différence est une fraction rationnelle $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$, dans laquelle le dénominateur $g_1(x)$ n'est autre chose que le quotient de $g(x)$ par $(x - x_0)^{\alpha_0}$, en désignant par α_0 le degré de multiplicité de la racine x_0 du polynome $g(x)$; On peut appliquer le même mode de raisonnement à cette fonction rationnelle, et l'on parvient ainsi à cette conclusion.

Si l'on a, en désignant par A une constante et par $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ des entiers naturels,

$$g(x) = A(x - x_0)^{\alpha_0} (x - x_1)^{\alpha_1} \ldots (x - x_{n-1})^{\alpha_{n-1}}$$

on pourra mettre la fraction $\frac{f(x)}{g(x)}$ sous la forme

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \mathfrak{L}_0\left(\frac{1}{x - x_0}\right) + \mathfrak{L}_1\left(\frac{1}{x - x_1}\right) + \ldots + \mathfrak{L}_{n-1}\left(\frac{1}{x - x_{n-1}}\right) \\ &\quad + \mathfrak{L}(x); \end{aligned}\right.$$

$\mathfrak{L}_i(z)$ désigne en général un polynome en z, sans terme indépendant de z, de degré inférieur ou égal à α_i : ce polynome n'existe pas si x_i est une racine de $f(x)$ d'un ordre de multiplicité égal ou supérieur à α_i ; si x_i est une racine d'ordre de multiplicité β_i inférieur à α_i, $\mathfrak{L}_i(z)$ est de degré $\alpha_i - \beta_i$. Si, comme on peut toujours le supposer, x_i n'est pas racine de $f(x)$, $\mathfrak{L}_i(z)$ est de degré α_i ; enfin $\mathfrak{L}(x)$ est un polynome en x, qui n'existe que dans le cas où le degré de $g(x)$ n'est pas supérieur à celui de $f(x)$, qui peut s'obtenir en faisant la division de $f(x)$ et de $g(x)$, ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de x, et en ne gardant que la partie entière.

L'expression $\mathfrak{F}_1\left(\frac{1}{x - x_1}\right)$ est la partie de la fraction proposée qui devient infinie quand x s'approche de x_1. $\mathfrak{F}(x)$ est la partie de la fraction qui devient infinie, ou qui reste constante, quand x devient infini. $\mathfrak{F}(x)$ s'appelle aussi la partie entière de la fraction $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Chacun des polynomes $\mathfrak{F}_1(z)$, $\mathfrak{F}(x)$ est entièrement déterminé quand on se donne la fraction $\frac{f(x)}{g(x)}$; en d'autres termes, celle-ci ne peut se mettre que d'une seule façon sous la forme (1).

Les résultats qui précèdent conduisent de la façon la plus simple, à la solution d'un problème important.

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_p$, p nombres distincts donnés ; à chacun de ces nombres a_i correspond un nombre naturel α_i également donné : On propose de trouver un polynome de degré inférieur à $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p$, tel que les valeurs de ce polynome et de ses $\alpha_i - 1$ premières dérivées pour $x = a_i$ soient des nombres donnés ($i = 1, 2, \ldots, p$). Dans le cas où α_i serait égal à 1, il faudrait entendre que la valeur du polynome pour $x = a_i$ est donnée, mais non celle de ses dérivées.

Soit $f(x)$ le polynome cherché et considérons la fraction rationnelle

$$\frac{f(x)}{(x - a_1)^{\alpha_1}(x - a_2)^{\alpha_2}\ldots(x - a_p)^{\alpha_p}};$$

on peut, comme on vient de l'expliquer, mettre cette fraction sous la forme d'une somme de fractions simples ; il n'y aura pas de partie entière, puisque le numérateur est de degré inférieur au dénominateur ; considérons par exemple la partie du développement qui correspond à la racine a_i de ce dénominateur, que l'on peut écrire $(x - a_i)^{\alpha_i} g(x)$, en désignant par $g(x)$ le produit des facteurs autres que $(x - a_i)^{\alpha_i}$; pour obtenir la partie cherchée du développement, on posera, d'après la règle précédente $x = a_i + z$ et l'on devra effectuer la division de $f(a_i + z)$ par $g(a_i + z)$, en ordonnant par rapport aux puissances croissantes de z, et en s'arrêtant, dans le quotient, au terme en $z^{\alpha_i - 1}$; le polynome $g(x)$ ou $g(a_i + z)$ est entièrement connu, par les données ; quant au polynome

$$f(a_i + z) = f(a_i) + \frac{z}{1} f'(a_i) + \ldots + \frac{z^{\alpha_i - 1}}{1.2\ldots\alpha_{i-1}} f^{(\alpha_i - 1)}(a_i) + \ldots,$$

on n'a besoin, pour faire la division, que d'en connaître les α_i premiers coefficients ; or c'est précisément ces α_i premiers coefficients que les données font connaître ; donc la division fera connaître la partie $\mathfrak{F}_i\left(\frac{1}{x-a_i}\right)$ de la fraction rationnelle qui correspond à la racine a_i et l'on voit que le polynome $f(x)$ sera le produit de

$$(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\dots(x-a_p)^{\alpha_p}$$

par

$$\mathfrak{F}_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right)+\mathfrak{F}_2\left(\frac{1}{x-a_2}\right)+\dots+\mathfrak{F}_p\left(\frac{1}{x-a_p}\right).$$

Un cas particulièrement simple et intéressant est celui où tous les nombres α_i sont égaux à 1 ; il s'agit alors de former un polynome de degré inférieur à p qui prenne des valeurs données A_1, A_2, ..., A_p pour des valeurs données a_1, a_2, ..., a_p de x.

La règle précédente donne ici

$$f(x)=A_1\frac{(x-a_2)(x-a_3)\dots(x-a_p)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\dots(a_1-a_p)}+A_2\frac{(x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_p)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\dots(a_2-a_p)}$$
$$+\dots+A_p\frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{p-1})}{(a_p-a_1)(a_p-a_2)\dots(a_p-a_{p-1})},$$

et cette formule même met bien en évidence la propriété du polynome $f(x)$.

Le lecteur reconnaîtra sans peine que cette formule est équivalente à celle-ci

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(a_1)}{\varphi'(a_1)}\frac{1}{x-a_1}+\frac{f(a_2)}{\varphi'(a_2)}\frac{1}{x-a_2}+\dots+\frac{f(a_p)}{\varphi'(a_p)}\frac{1}{x-a_p},$$

où $\varphi'(a_1)$, $\varphi'(a_2)$, ... sont les valeurs pour $x=a_1, a_2, \dots$ de la dérivée $\varphi'(x)$ du polynome

$$\varphi(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_p);$$

elle suppose seulement que les nombres a_1, a_2, ..., a_p sont distincts et que le polynome $f(x)$ est de degré inférieur à p.

175. — La fonction a^x, où a est un nombre positif que, dans ce qui suit, je supposerai plus grand que 1, est définie dans l'ensemble des valeurs rationnelles de x (n° **27**). Il reste à la définir pour les valeurs irrationnelles. Il convient d'abord d'en établir les propriétés

suivantes, en ne considérant que ces valeurs rationnelles pour lesquelles elle est définie : La fonction a^x est continue pour chaque valeur rationnelle de x : cette continuité doit être entendue au sens du n° **152**, en se rappelant que chaque nombre rationnel est un point d'accumulation de l'ensemble des nombres rationnels ; en d'autres termes, cet ensemble est dense dans tout intervalle. Si x et y sont des nombres rationnels l'inégalité $x > y$ entraîne l'inégalité $a^x > a^y$; on peut dire, si l'on veut, que dans l'ensemble des nombres rationnels, a^x croît avec x (n° **146**).

L'identité

$$a^{x_0+h} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^h - 1),$$

où x_0 et h sont supposés rationnels, permet de ramener l'étude de la fonction a^x, aux environs de x_0, à cette même étude pour les valeurs de h voisines de 0.

Supposons d'abord que h soit positif et soit m un nombre naturel tel que l'on ait $h < \frac{1}{m}$, on aura

$$a^h < a^{\frac{1}{m}} \quad \text{ou} \quad \sqrt[m]{a};$$

il est aisé de voir que l'on peut prendre m assez grand pour que $\sqrt[m]{a}$ soit aussi voisin de 1 qu'on le voudra. Soit en effet $\sqrt[m]{a} = 1 + \alpha$, en désignant par α un nombre positif ; on en conclut

$$a = (1+\alpha)^m > 1 + m\alpha \quad \text{ou} \quad m\alpha < a - 1 ;$$

si donc on veut que α soit plus petit que le nombre positif ε donné à l'avance, il suffit de prendre $m > \frac{a-1}{\varepsilon}$; c'est-à-dire m supérieur à la partie entière de $\frac{a-1}{\varepsilon}$.

On aura d'ailleurs, que h soit positif ou négatif,

$$|a^h - 1| < \varepsilon,$$

pourvu que l'on ait $|h| < \frac{1}{m}$, m étant déterminé comme on vient de le dire : car si $h = -k$ est négatif, on aura

$$1 - a^h = \frac{a^k - 1}{a^k} < a^k - 1 < \varepsilon$$

puisque a^k est plus grand que 1. Ainsi il suffit de prendre h plus

petit, en valeur absolue que l'inverse d'un entier supérieur à la partie entière de $\frac{a-1}{\varepsilon}$ pour être sûr que l'on a $|a^h - 1| < \varepsilon$; c'est dire que la fonction a^x est continue pour $x = 0$, puisque 1 est précisément la valeur de cette fonction pour $x = 0$: la continuité de la fonction, pour une valeur rationnelle quelconque x_0, résulte de l'identité qui a servi de point de départ.

On voit même sur cette identité, que, comme on le savait d'après le n° **162**, la continuité de la fonction a^x est uniforme dans tout intervalle $(-\lambda, \lambda)$ dont les bornes sont des nombres rationnels ; si en effet x_0 et $x_0 + h$ appartiennent à cet intervalle, comme on a certainement $a^{x_0} \leqq a^\lambda$, on voit que la différence entre a^{x_0+h} et a^{x_0} sera moindre en valeur absolue que ε, pourvu que l'on ait $|h| < \frac{1}{m}$ et que m soit un nombre naturel supérieur à la partie entière de $\frac{a-1}{a^\lambda \varepsilon}$.

Soit maintenant X un nombre quelconque, rationnel ou non. Soit (E) l'ensemble des valeurs de a^x pour les valeurs rationnelles de x inférieures à X, (E_1) l'ensemble des valeurs de a^x pour les valeurs rationnelles de x supérieures à X. D'après ce qu'on vient de dire tous les éléments de (E) seront inférieurs aux éléments de (E_1) ; il n'y a pas dans le premier ensemble de nombre plus grand que tous les autres éléments de cet ensemble, ni dans le second de nombre plus petit que tous les autres éléments de ce même ensemble : il y a dans les deux ensembles des éléments dont la différence est moindre que ε.

La borne supérieure de (E) est égale à la borne inférieure de (E_1) et elles sont toutes deux égales à a^x si X est rationnel : c'est cette borne commune que l'on prendra pour définition de a^x, quand X est irrationnel.

L'extension de l'identité

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

au cas où x, y ne sont pas tous deux des nombres rationnels est une conséquence du n° **45** ; le fait que l'inégalité $x > y$ entraîne $a^x > a^y$ s'aperçoit immédiatement en intercalant un nombre rationnel z entre x et y, on a alors

$$a^x > a^z, \qquad a^z > a^y ;$$

comme il résulte de la définition précédente. La limite des valeurs de $| h |$ au-dessous de laquelle on peut affirmer que l'on a

$$| a^h - 1 | < \varepsilon,$$

reste la même puisque la proposition d'après laquelle on a $a^h < a^{\frac{1}{m}}$ quand le nombre positif h est plus petit que l'inverse du nombre naturel m subsiste ainsi que les conclusions qu'on en tire. La continuité de la fonction a^x pour $x = 0$, et pour toute valeur de x, subsiste donc aussi.

On a

$$\lim_{x=+\infty} a^x = +\infty, \qquad \lim_{x=-\infty} a^x = 0;$$

la première proposition résulte de ce que, en pesant $a = 1 + \alpha$, et en désignant par m la partie entière de x, a^x qui est égal ou supérieur à a^m est certainement plus grand que $1 + m\alpha$ et de ce que

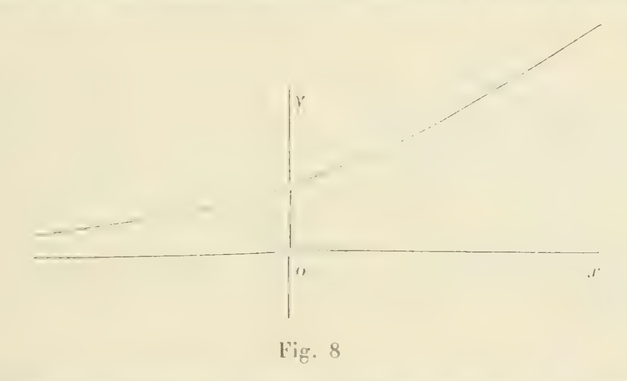


Fig. 8

m grandit indéfiniment avec x; la seconde résulte de la première et de l'égalité

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}}.$$

Ainsi, quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$, la fonction a^x croît de 0 à $+\infty$. Cette variation est représentée par la figure ci-dessus. Lorsque a est plus petit que 1, on posera $a = \frac{1}{b}$, b étant plus grand que 1, et l'on définira a^x par l'égalité

$$a^x = \frac{1}{b^x} = b^{-x}.$$

Toutes les propriétés subsistent, si ce n'est que, dans ce cas, a^x décroît de $+\infty$ à o quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$. Si a est égal à 1, a^x est par définition aussi égal à 1.

Afin de définir a^x pour toutes les valeurs de x, on s'est appuyé sur ce que la fonction a^x, définie dans l'ensemble des nombres rationnels, était à la fois continue et croissante dans cet ensemble. La continuité seule aurait permis d'arriver à cette définition, en s'appuyant sur la règle du n° **158**, qui permet de reconnaître si une fonction définie dans un ensemble (ici l'ensemble des nombres rationnels) admet une limite pour un point d'accumulation X de cet ensemble. Il est clair, en raison de la continuité, que l'on peut faire correspondre au nombre positif ε un nombre positif η tel que l'on ait

$$|a^x - a^{x'}| < \varepsilon,$$

sous la condition que x, x' soient rationnels et vérifient les conditions

$$|X - x| < \eta, \quad |X - x'| < \eta;$$

qui entraînent la condition $|x - x'| < 2\eta$; c'est la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction a^x ait une limite pour $x = X$, au sens du n° **151**; cette limite est, par définition, la valeur de a^x. L'extension des propriétés établies pour l'ensemble des nombres rationnels se fait sans difficulté quand on se place à ce point de vue.

En raisonnant de la même façon, le lecteur établira sans peine la proposition suivante :

Si $f(x)$ est une fonction de x définie dans un ensemble (E) dense dans l'intervalle (a, b) et si elle est continue dans cet ensemble, on peut la définir comme une fonction continue dans tout l'intervalle (a, b).

176. — La fonction a^x étant définie, continue et croissante dans tout intervalle (α, β), on voit que x peut être défini comme la fonction inverse de y, par l'équation

$$a^x = y,$$

dans l'intervalle (a^α, a^β); x sera une fonction de y continue et

croissante (en supposant $a > 1$) : on la désigne par $\log_a y$ (logarithme de y dans la base a) ou, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté à craindre, par $\log y$. Les bornes a^{α}, a^{β} de l'intervalle où cette fonction est définie sont deux nombres positifs quelconques ; en d'autres termes $\log y$ est défini pour toutes les valeurs positives de y, $\log y$ est positif pour $y > 1$, nul pour $y = 1$, négatif pour $y < 1$, et croît de $-\infty$ à $+\infty$ quand y varie de 0 à 1 ; la variation de $\log y$ se lit sur la figure de la page 273 en regardant y comme la variable et x comme la fonction.

La fonction $\log x$ peut être regardée comme définie par l'équation

$$a^{\log x} = x,$$

où il est entendu que x est un nombre positif.

A la propriété $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$, correspond la propriété fondamentale des logarithmes

$$\log(xy) = \log x + \log y,$$

à laquelle on peut rattacher les suivantes

$$\log\frac{x}{y} = \log x - \log y, \qquad \log\frac{1}{x} = -\log x ;$$

x, y sont toujours supposés positifs.

177. — La propriété fondamentale

$$(1) \qquad \varphi(x)\,\varphi(y) = \varphi(x+y),$$

dont jouit la fonction a^x, caractérise cette fonction ; toute fonction $\varphi(x)$, continue pour toute valeur de x et qui jouit de la propriété (1), est de la forme a^x ; j'emprunte la démonstration de cette proposition à Cauchy [1].

En remplaçant d'abord dans l'égalité (1) x et y par $\frac{x}{2}$, on trouve

$$\varphi(x) = \left[\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2,$$

ce qui montre que la fonction $\varphi(x)$ doit être positive quel que soit x.

(1) *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*, p. 106.

Puis, la supposition $y = 0$ donne

$$\varphi(x)\,\varphi(0) = \varphi(x);$$

on a donc

(2) $$\varphi(0) = 1;$$

si l'on ne veut pas supposer que la fonction $\varphi(x)$ soit constamment nulle.

En faisant $y = -x$ dans (1), on trouve

(3) $$\varphi(x)\,\varphi(-x) = \varphi(0) = 1.$$

L'égalité fondamentale (1) conduit immédiatement à la suivante :

$$\varphi(x_1)\,\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n) = \varphi(x_1 + x_2 + \ldots + x_n),$$

d'où, en supposant toutes les quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$, égales à x

(4) $$\varphi(nx) = [\varphi(x)]^n;$$

cette égalité, établie pour un nombre entier n, s'étend aux nombres quelconques.

Elle s'étend d'abord aux nombres positifs n de la forme $\frac{1}{p}$, où p est un nombre entier, car l'égalité (4), quand on y remplace n par p et x par $\frac{x}{p}$, devient

$$\varphi(x) = \varphi\left(\frac{x}{p}\right)^p,$$

d'où

(5) $$\varphi\left(\frac{x}{p}\right) = \sqrt[p]{\varphi(x)} = [\varphi(x)]^{\frac{1}{p}};$$

c'est bien la détermination arithmétique qu'il faut prendre pour $\sqrt[p]{\varphi(x)}$, puisque $\varphi\left(\frac{x}{p}\right)$ doit être positif : l'égalité (5) n'est autre que l'égalité (4), où $\frac{1}{p}$ remplace n.

Si maintenant on élève à la puissance q, q étant un nombre naturel, les deux membres de l'égalité (5), on a

$$\left[\varphi\left(\frac{x}{p}\right)\right]^q = [\varphi(x)]^{\frac{q}{p}};$$

mais en vertu de l'égalité (4), on a,

$$\left[\varphi\left(\frac{x}{p}\right)\right]^q = \varphi\left(q\frac{x}{p}\right);$$

par suite on a

$$\varphi\left(\frac{q}{p}x\right) = [\varphi(x)]^{\frac{q}{p}}.$$

Ainsi l'égalité (4) est étendue à tous les nombres rationnels positifs ; en tenant compte de (3), elle s'étend immédiatement à tous les nombres rationnels négatifs : elle est vraie pour $n = 0$, en vertu de (2).

Jusqu'ici, on ne s'est pas servi de cette supposition que la fonction $\varphi(x)$ est continue. Cette supposition intervient pour étendre aux nombres irrationnels l'égalité (4).

Soit en effet

$$n_1, \quad n_2, \ \ldots, \quad n_r, \ \ldots,$$

une suite infinie de nombres rationnels ayant pour limite le nombre irrationnel n ; on aura, quel que soit l'indice r,

$$\varphi(n_r x) = [\varphi(x)]^{n_r}.$$

lorsque r augmente indéfiniment, $n_r x$ tend vers nx, et puisque la fonction φ est continue, $\varphi(n_r x)$ a pour limite $\varphi(nx)$; de même $[\varphi(x)]^{n_r}$ a pour limite $[\varphi(x)]^n$, à cause de la continuité de la fonction a^x ; les limites des deux membres sont égales et l'on a ainsi, quel que soit le nombre n,

(6) $$\varphi(nx) = [\varphi(x)]^n.$$

Si maintenant, dans cette égalité, on remplace x par 1 et n par x, il vient

$$\varphi(x) = [\varphi(1)]^x;$$

en désignant par a la constante positive $\varphi(1)$, on aura finalement

$$\varphi(x) = a^x.$$

Observons que le mode de raisonnement qui a permis d'établir

l'égalité (6), appliquée à la fonction a^x, prouve que l'on a, quels que soient les nombres n et x

$$a^{nx} = (a^x)^n,$$

et que cette même égalité, lorsqu'on y remplace x par $\log x$, puis $a^{\log x}$ par x, devient

$$a^{n \log x} = x^n,$$

d'où l'on conclut l'égalité

$$n \log x = \log x^n,$$

qui est vraie quels que soient le nombre n et le nombre positif x.

La même méthode qui a permis d'établir que la propriété

$$\varphi(x)\,\varphi(y) = \varphi(x+y),$$

lorsqu'on suppose la fonction $\varphi(x)$ continue, n'appartient qu'à la fonction a^x, permet de montrer que la propriété

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

lorsque l'on suppose la fonction $\varphi(x)$ continue n'appartient qu'à la fonction $\log x$; au reste l'une des propositions peut être rattachée à l'autre.

178. — Lorsque m est un entier positif ou négatif, la fonction x^m est entière ou rationnelle. Si m est un nombre fractionnaire ou irrationnel, la fonction x^m est définie pour toutes les valeurs positives de x ; comme on peut, en remplaçant x par $a^{\log x}$, et en utilisant les remarques du numéro précédent, la mettre sous la forme

$$a^{m \log x},$$

on voit en se reportant aux propriétés des fonctions $\log x$, a^x et aux remarques du n° **171** sur les fonctions de fonction, qu'elle est continue pour toutes les valeurs positives de x, à l'exclusion de la valeur o ; que, lorsque x croît de o à $+\infty$, elle croît de o à $+\infty$, ou décroît de $+\infty$ à o suivant que m est positif ou négatif. Au reste il ne serait pas bien difficile d'établir ces propositions direc-

tement, en se bornant au cas où m est positif, et en s'appuyant d'une part sur l'égalité

$$(x+h)^m - x^m = x^m\left[\left(1+\frac{h}{x}\right)^m - 1\right],$$

d'autre part sur la remarque suivante : si M est un nombre naturel plus grand que m, on a en désignant par z un nombre positif moindre que 1

$$1 < (1+z)^m < (1+z)^M < 1 + Mz(1+z)^{M-1} < 1 + 2^{M-1}Mz.$$

La fonction x^m jouit évidemment de la propriété

$$\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy),$$

et un raisonnement analogue à celui du numéro précédent montre qu'elle est la seule fonction continue qui jouisse de cette propriété [1].

Les fonctions particulières que l'on a considérées jusqu'ici se sont présentées naturellement ; les fonctions circulaires dont il va bientôt être question ont assurément leur origine dans la géométrie : l'étude des propriétés de ces fonctions a conduit à des représentations analytiques qui peuvent être prises pour définitions de ces fonctions et permettent de retrouver leurs propriétés : ces définitions se rattachent à la considération de suites dans lesquelles les termes ne dépendent pas uniquement de leur rang mais bien d'une variable x. C'est sur la considération, très importante en elle-même, de ces suites que je vais m'arrêter maintenant.

[1] Le même mode de raisonnement permet encore d'établir que la fonction ax, où a est une constante quelconque est la seule fonction continue qui jouisse de la propriété

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x+y).$$

C'est cette proposition qui sert habituellement à établir la proportionnalité des grandeurs.

CHAPITRE V

SUITES INFINIES A TERMES VARIABLES
CONVERGENCE UNIFORME
DÉFINITION DES FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

I. — CONVERGENCE UNIFORME

179. — Désignons en général par $f_n(x)$ une fonction de la variable x, qui, pour chaque valeur du nombre naturel n soit déterminée dans un ensemble (X), par exemple dans un intervalle (a, b). Supposons que, pour chaque valeur de x appartenant à l'ensemble (X), $f_n(x)$ ait une limite quand n augmente indéfiniment : cette limite, étant ainsi déterminée pour chaque valeur de x qui appartient à l'ensemble (X) peut être regardée comme une fonction de x déterminée dans l'ensemble (X) ; je désignerai cette fonction par $f(x)$ et je poserai

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x).$$

Il est naturel de dire que la fonction $f(x)$ est la limite de $f_n(x)$ pour n infini. Si l'on se donne une valeur de x, appartenant à l'ensemble (X) et un nombre positif ε, il existera certainement une valeur de n telle que l'on ait, pour cette valeur de x

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon ;$$

Cette valeur de n dépend en général de x et de ε ; le cas où elle ne dépend que de ε est particulièrement intéressant. En effet, dans ce cas, la fonction $f_n(x)$ fournit une expression approchée de $f(x)$,

avec un degré d'approximation qui est le même quelle que soit la valeur de x, appartenant à l'ensemble (X) ; elle renseignera ainsi, dans une certaine mesure, sur les propriétés et l'allure de la fonction $f(x)$, qui, dans bien des cas, n'est connue que par les fonctions $f_n(x)$ dont elle est la limite. Au contraire, si afin d'avoir le même degré d'approximation, on peut, pour certaines valeurs de x, s'arrêter à une fonction $f_n(x)$ où n n'est pas très grand, tandis qu'il faut, pour d'autres valeurs de x, aller très loin dans la suite

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \dots, \quad f_n(x), \quad \dots,$$

le fait que cette suite a pour limite $f(x)$ constitue un renseignement beaucoup moins précieux.

Je dirai que la fonction $f_n(x)$, déterminée pour chaque valeur du nombre naturel n et pour chaque valeur x de l'ensemble (X), tend ou converge uniformément dans (X), *au sens large*, vers sa limite $f(x)$, lorsqu'à chaque nombre positif ε, si petit qu'il soit, correspond un nombre naturel n tel que l'on ait

$$|f(x) - f_n(x)| \leqq \varepsilon$$

pour toute valeur de x appartenant à (X). Je dirai, dans les mêmes conditions, que la suite $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... est uniformément convergente *au sens large*.

Cette définition large de la convergence uniforme permet en quelque sorte dans la suite $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., supposée convergente (sans épithète) une certaine irrégularité, qu'il est souhaitable d'exclure. On peut bien avoir, pour une certaine valeur de n, et pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à (X),

$$|f(x) - f_n(x)| \leqq \varepsilon,$$

en sorte que, pour toutes ces valeurs de x, $f_n(x)$ représente $f(x)$ avec une erreur moindre que ε, sans que cette approximation se conserve quand on va plus loin dans la suite, sans que l'on ait $|f(x) - f_m(x)| \leqq \varepsilon$ pour $m > n$. Aussi convient-il d'adopter pour la définition de la convergence uniforme, proprement dite, la suivante, évidemment plus restrictive que celle qui précède.

La fonction $f_n(x)$, déterminée pour chaque valeur du nombre naturel n et pour chaque valeur de x appartenant à (X), tend ou converge uniformément dans cet ensemble vers sa limite $f(x)$

lorsqu'à chaque nombre positif ε, si petit qu'il soit, correspond un nombre naturel p tel que l'on ait $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, quels que soient le nombre x, appartenant à l'ensemble (X), et le nombre naturel n supérieur ou égal à p.

C'est cette définition qui sera adoptée dans la suite, à moins que l'on ne dise convergence uniforme « au sens large ».

On peut réunir les conditions nécessaires et suffisantes pour que $f_n(x)$ ait une limite, et tende uniformément vers cette limite, en disant :

La fonction $f_n(x)$ a une limite pour n infini et tend uniformément vers sa limite dans l'ensemble (X) si à chaque nombre positif ε on peut faire correspondre un entier p tel que l'on ait, pour toutes les valeurs des nombres naturels n, m supérieures ou égales à p,

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

quel que soit le nombre x de l'ensemble (X).

La condition est nécessaire, car si la fonction $f_n(x)$ tend uniformément vers sa limite $f(x)$, on peut faire correspondre au nombre $\frac{\varepsilon}{2}$ un nombre p tel que l'on ait pour les nombres n et m supérieurs ou égaux à p,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

et, par suite

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Elle est suffisante ; car, si elle est vérifiée, l'existence d'une limite $f(x)$, pour chaque nombre x appartenant à (X), résulte d'abord du théorème du n° **56** ; puis l'inégalité précédente, si l'on y fait croître m indéfiniment, donne $|f_n(x) - f(x)| \leqq \varepsilon$, pour toutes les valeurs de n supérieures à p.

On sera certainement dans ce cas si l'on connaît une suite infinie de *nombres* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, admettant une limite et tels que l'on ait, pour toutes les valeurs des nombres naturels n, m et pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à l'ensemble (X),

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqq |\alpha_m - \alpha_n|,$$

puisque, si l'on se donne le nombre positif ε, on peut lui faire cor-

respondre un nombre naturel p tel que l'on ait $|z_m - z_n| < \varepsilon$, sous les conditions $m > p$, $n > p$. Le cas où les nombres z_1, z_2, ..., z_n, ... sont positifs et forment une suite croissante (ou décroissante) se présente fréquemment.

Notons encore la remarque évidente que voici : si la suite $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... est uniformément convergente dans l'ensemble (X), elle est uniformément convergente dans tout ensemble (X_1) contenu dans (X).

Voici maintenant quelques exemples : soit $f_n(x) = \frac{1}{1 + nx}$: la fonction $f_n(x)$ est définiepour toute valeur positive ou nulle de x ; on a évidemment

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = 1 \text{ ou } 0,$$

suivant que x est nul ou positif : la fonction $f(x)$ est égale à 1 pour $x = 0$, elle est égale à 0 pour les valeurs positives de x. Pour $x = \frac{1}{n}$, la fonction $f_n(x)$ est d'ailleurs égale à $\frac{1}{2}$; dans l'intervalle (0, 1), elle ne tend pas uniformément vers sa limite. En effet, quelque soit le nombre naturel n, il y a dans l'intervalle considéré une valeur $x = \frac{1}{n}$, pour laquelle la différence $|f_n(x) - f(x)|$ est égale à $\frac{1}{2}$. On observera ici que la fonction $f(x)$ n'est pas continue dans l'intervalle (0, 1), quoique chacune des fonctions $f_n(x)$, dont elle est la limite soit continue.

Dans tout intervalle (a, b) limité par deux nombres positifs a, b $(a < b)$, la fonction $f_n(x)$ tend uniformément vers sa limite 0, en effet, pour avoir

$$\frac{1}{nx + 1} < \varepsilon,$$

il suffira de prendre n supérieur à la partie entière de $\frac{1-\varepsilon}{a\varepsilon}$.

Considérons maintenant les fonctions $f_n(x)$ définies par les égalités suivantes :

$$f_{2m-1}(x) = 0, \qquad f_{2m}(x) = \frac{x}{mx^2 + (1 - mx)^2},$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots);$$

il est clair que l'on a $\lim\limits_{m=\infty} f_{2m}(x) = 0$, quel que soit x et, par conséquent, quel que soit encore x,

$$\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x) = 0.$$

Considérons l'intervalle $(0, 1)$. Pour $x = \frac{1}{m}$, on a $f_{2m}(x) = 1$. La fonction $f_n(x)$ tend uniformément, au sens large, vers sa limite, puisque, pour toutes les valeurs impaires de n la différence $|f_n(x) - f(x)|$ est nulle ; mais elle ne tend pas uniformément vers cette limite, au sens qui a été adopté finalement, puisque, quelque grand que soit p, il y a des nombres pairs $2m$ plus grands que p et des valeurs $\frac{1}{m}$ de x, telles que la différence $|f_m(x) - f(x)|$ soit égale à 1.

Les exemples qui précèdent mettent en évidence la différence entre la convergence sans épithète, la convergence uniforme proprement dite et la convergence uniforme au sens large. Les considérations générales qui terminent le présent numéro contribueront à éclaircir la notion capitale de la convergence uniforme ; toutefois le lecteur peut, sans inconvénient pour la suite, les laisser de côté.

Supposons qu'à chaque valeur du nombre positif ε corresponde un nombre naturel n tel que l'on ait, pour toute valeur de x appartenant à (X), $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$: à ce nombre ε peuvent d'ailleurs correspondre plusieurs nombres n, même une infinité : soit en général, $\mathcal{E}(\varepsilon)$ l'ensemble des inverses des nombres naturels n qui correspondent ainsi à ε ; on aperçoit de suite que l'ensemble $\mathcal{E}(\varepsilon)$ satisfait aux conditions du n° **156** ; il y a donc un ou plusieurs points k, formant un ensemble $\mathcal{E}(0)$, dont chacun appartient à tous les ensembles $\mathcal{E}(\varepsilon)$ ou est, pour chaque ensemble $\mathcal{E}(\varepsilon)$, un point d'accumulation. D'autre part, par sa nature même, l'ensemble $\mathcal{E}(\varepsilon)$ ne peut avoir d'autre point d'accumulation que le point 0 ; il y a deux cas à distinguer suivant que 0 est, ou non, un point d'accumulation pour tous les ensembles $\mathcal{E}(\varepsilon)$. Dans le cas où 0 n'est pas un point d'accumulation pour tous ces ensembles, ceux-ci doivent avoir au moins un point commun k ; si l'on pose $n = \frac{1}{k}$, le nombre naturel n jouira de la propriété suivante ; quel que soit le nombre positif ε on aura, pour chaque valeur de x appartenant à (X),

$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, et par suite $f_n(x) = f(x)$. Dans ce cas, l'un des termes, au moins, de la suite $f_1(x), f_2(x), \dots$ sera la fonction limite elle-même. Cette circonstance s'est présentée dans l'un des exemples précédents. Supposons maintenant que o soit un point d'accumulation pour tous les ensembles $\mathcal{E}(\varepsilon)$, c'est-à-dire qu'il y ait, quel que soit le nombre positif ε, des nombres naturels n, aussi grands qu'on le veut, tels que la différence $f(x) - f_n(x)$ soit moindre que ε en valeur absolue, pour toutes les valeurs de x appartenant à (X) ; on va montrer qu'on peut alors extraire de la suite $f_1(x), f_2(x), \dots$ une autre suite $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ qui soit uniformément convergente, au vrai sens du mot.

Donnons-nous, en effet, une suite infinie de nombres positifs décroissants, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, \dots$, tels que l'on ait $\lim\limits_{r=\infty} \varepsilon_r = 0$, et soit en général n_r l'inverse d'un nombre qui figure dans l'ensemble $\mathcal{E}(\varepsilon_r)$ précédemment défini ; on prendra $\varphi_r(x) = f_{n_r}(x)$; la suite $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$, sera bien uniformément convergente, puisque, si on se donne le nombre positif ε, et si l'on prend dans la suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$, un nombre $\varepsilon_r < \varepsilon$, on aura pour toutes les valeurs de l'indice s supérieures ou égales à r,

$$|\varphi_s(x) - f(x)| < \varepsilon_s < \varepsilon_r < \varepsilon.$$

Ainsi les suites $f_1(x), f_2(x), \dots$, que l'on a appelées plus haut « uniformément convergentes, au sens large » peuvent être divisées en trois catégories.

1° Celles qui sont uniformément convergentes au vrai sens du mot ;

2° Celles d'où l'on peut extraire une suite uniformément convergente, et qui peuvent ainsi être regardées comme provenant d'une telle suite, où s'intercalent des termes irréguliers qui, toutefois, n'empêchent pas la convergence (sans épithète) de la suite ;

3° Enfin celles d'où l'on ne peut pas extraire de suite uniformément convergente, mais où la fonction limite $f(x)$ figure comme terme : c'est la seule présence de ce terme, laquelle n'a évidemment rien d'essentiel, qui rapproche la suite $f_1(x), f_2(x), \dots$, d'une suite uniformément convergente.

Soit $f_1(x), f_2(x), \dots$, une suite infinie de fonctions déterminées dans l'ensemble *borné* (X) : je suppose qu'il y ait une fonction $f(x)$, déterminée dans le même ensemble, telle que l'on ait, pour

chaque valeur de x appartenant à (X), $\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x)$; je suppose en outre que la suite n'est pas uniformément convergente dans cet ensemble, c'est-à-dire qu'il ne correspond pas à tout nombre positif α un nombre naturel p tel que l'on ait

$$|f(x) - f_n(x)| < \alpha$$

pour tous les nombres x appartenant à (X) et tous les nombres naturels $n > p$. En d'autres termes, il y a un nombre positif α qui jouit de la propriété suivante : quel que soit le nombre naturel p, pour un certain nombre x appartenant à (X) et un certain nombre naturel $n > p$ on a $|f(x) - f_n(x)| \geqq \alpha$. Soit $\mathcal{E}_p$ l'ensemble des valeurs de x appartenant à (X) auxquelles on peut ainsi associer un nombre naturel $n > p$, en sorte que l'inégalité précédente soit vérifiée.

La suite des ensembles $(\mathcal{E}_p)$ ($p = 1, 2, 3, \ldots$), tous contenus dans (X), est de la nature de celles que l'on a considérées à la fin du n° **156** ; d'un autre côté, il ne peut pas y avoir de point k commun à tous ces ensembles, car un tel point appartiendrait à (X) et l'inégalité $|f(k) - f_n(k)| \geqq \alpha$ qui devrait, pour ce point, se trouver vraie, quel que fut p, pour une valeur de n supérieure à p, est incompatible avec la supposition $\lim_{n=\infty} f_n(k) = f(k)$. Soit $(\mathcal{E}_\omega)$ l'ensemble (fini ou clos) des points d'accumulation communs à tous les ensembles $\mathcal{E}_p$ ($p = 1, 2, 3, \ldots$).

Tout point k de cet ensemble $(\mathcal{E}_\omega)$ est un point d'accumulation de (X), appartenant, ou non, à (X). Un tel point k est caractérisé par la propriété que voici : il y a des couples de nombres x, n dont le premier appartient à (X) et est aussi voisin de k qu'on le veut, dont le second est un nombre naturel aussi grand qu'on le veut, pour lesquels on a $|f(x) - f_n(x)| \geqq \alpha$. Cet ensemble $\mathcal{E}_\omega$ dépend du nombre positif α ; pour marquer cette dépendance, désignons-le par $\mathcal{E}_\omega(\alpha)$. Si β est un nombre positif plus petit que α, l'ensemble $\mathcal{E}_\omega(\alpha)$ est contenu dans l'ensemble $\mathcal{E}_\omega(\beta)$. Soit $(\mathcal{E}'_\omega)$ l'ensemble des points qui appartiennent à quelque ensemble $e_\omega(\alpha)$ où α est un nombre positif : en d'autres termes, un point k de $(\mathcal{E}'_\omega)$ est caractérisé par cela même qu'il correspond au nombre k un nombre positif α tel que k appartienne à l'ensemble précédemment défini $\mathcal{E}_\omega(\alpha)$. C'est aux points de $(\mathcal{E}'_\omega)$ que se manifeste, en quelque sorte le

défaut d'uniformité dans la convergence de la suite $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... Celle-ci est uniformément convergente dans tout ensemble (X), contenu dans (X), dont aucun point d'accumulation n'appartient à (ξ_ω), en particulier dans tout ensemble clos, contenu dans (X) qui n'a aucun point commun avec (ξ_ω).

180. — Supposons que l'ensemble (X) des valeurs de x dans lequel les fonctions $f_n(x)$ sont déterminées soit clos. Si la fonction $f_n(x)$ est continue (n° **162**) dans l'ensemble (X) et si elle converge uniformément (même au sens large) vers sa limite $f(x)$, celle-ci est aussi continue dans l'ensemble (X).

Soit en effet ε un nombre positif quelconque; on pourra, en raison de la convergence uniforme, lui faire correspondre un nombre naturel n tel que l'on ait, quels que soient les nombres x, x' de l'ensemble (X),

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |f(x') - f_n(x')| < \frac{\varepsilon}{3},$$

puis, en raison de la continuité de la fonction $f_n(x)$, un nombre positif η, assez petit pour que l'on ait

$$|f_n(x') - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

sous la condition $|x' - x| < \eta$. Comme on a

$$|f(x') - f(x)| \leq |f(x') - f_n(x')| + |f_n(x') - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|,$$

on aura, sous la seule condition que x' et x appartiennent à l'ensemble (X) et vérifient l'inégalité $|x' - x| < \eta$,

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon.$$

La continuité de la fonction $f(x)$, dans l'ensemble (X) est démontrée.

Ainsi qu'on l'a vu par un exemple, cette continuité n'est pas assurée par la seule continuité des fonctions $f_n(x)$.

Dans le cas, signalé plus haut, où la fonction limite $f(x)$ fait partie de la suite $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., le théorème précédent est un simple truisme.

De même l'inégalité

$$|f_n(x) - f(x')| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(x')|,$$

permet de montrer en supposant toujours que (X) soit clos et que la fonction $f_n(x)$, continue dans (X), tende uniformément vers sa limite $f(x)$, aussi continue dans (X), que, quel que soit le nombre positif ε, on peut lui faire correspondre un nombre positif η et un nombre naturel n tels que l'on ait

$$|f_n(x) - f(x')| < \varepsilon$$

pourvu que x et x' appartiennent à l'ensemble (X) et qu'on ait

$$n > p, \qquad |x - x'| < \eta.$$

La proposition qu'on vient d'établir est très importante ; il importe toutefois d'observer que, lorsqu'on suppose $\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x)$, et que l'on suppose continues les fonctions $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, la convergence uniforme de la suite $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., n'est pas une condition *nécessaire* pour la continuité de la fonction $f(x)$.

181. — Il convient de remarquer en passant qu'une fonction de x telle que $f_n(x)$, définie dans l'ensemble (X) pour chaque valeur du nombre naturel n, est au fond une fonction de *deux* variables x et n définie pour chaque couple de nombres x et n dont le premier appartient à (X), le second à l'ensemble des nombres naturels. Il est clair qu'on peut étendre quelque peu les notions qui précèdent en remplaçant ce dernier ensemble par un autre ensemble. Considérons une fonction $f(x, y)$ de deux variables, déterminée pour chaque couple de nombres x, y, dont le premier appartient à l'ensemble (X) et le second à l'ensemble (Y). Pour chaque valeur de y appartenant à l'ensemble (Y), $f(x, y)$ est une fonction de x déterminée dans (X). Soit b un point d'accumulation de (Y) et supposons que x étant regardé comme un nombre déterminé, d'ailleurs quelconque, pourvu qu'il appartienne à l'ensemble (X), $f(x, y)$ ait une limite pour $y = b$, quand y s'approche de b en restant dans l'ensemble (Y), en sorte que l'on puisse, en désignant par $f(x)$ cette limite, déterminée ainsi pour chaque nombre x de l'ensemble (X), écrire l'égalité

$$\lim_{y=b} f(x, y) = f(x),$$

à laquelle on donnera le sens du n° **151** ; $f(x)$ peut être regardé

comme une fonction de x définie par cette égalité dans l'ensemble (X).

On pourra dire, en entendant toujours que y s'approche de b en restant dans (Y) :

$f(x, y)$ tend uniformément vers sa limite $f(x)$ si à chaque nombre positif ε, quelque petit qu'il soit, correspond un nombre positif η tel que l'on ait $|f(x, y) - f(x)| < \varepsilon$, pour tout système de nombres (x, y) dont le premier appartient à (X), dont le second appartient à (Y) et vérifie la condition $|y - b| < \eta$.

A côté de cette définition, on pourrait, comme au n° **179**, placer une définition de la convergence uniforme « au sens large ». Au surplus, la plupart des propositions et considérations développées au n° **179** pourraient être reprises de ce nouveau point de vue, je ne m'y arrêterai pas et je me contente de signaler, en raison de sa grande importance, le théorème correspondant à celui du n° **189**.

La fonction $f(x, y)$ peut être regardée comme une fonction de x définie dans l'ensemble (X) pour trouver les valeurs de y qui appartiennent à l'ensemble (Y). Supposons que l'ensemble (X) soit clos et que, pour chaque valeur de y appartenant à l'ensemble (Y), la fonction $f(x, y)$, considérée comme une fonction de x, soit une fonction continue de x dans l'ensemble (X). Si $f(x, y)$ tend uniformément vers sa limite $f(x)$ quand y s'approche du point d'accumulation b de (Y) en restant dans cet ensemble, on peut affirmer la continuité de la fonction $f(x)$ dans (X). La démonstration est la même qu'au n° **180**.

Inversement, si $f(x, y)$ est une fonction continue des deux variables x, y dans l'ensemble (XY) dont les éléments sont les couples de valeurs de x, y qui vérifient les conditions $A \leqq x \leqq A'$, $B \leqq y \leqq B'$ et si, en regardant x comme un nombre fixe de l'intervalle (A, A'), on suppose que y, toujours assujetti à appartenir à l'intervalle (B, B') tende vers une valeur y_0, appartenant aussi à cet intervalle, il est clair que l'on aura

$$\lim_{y=y_0} f(x, y) = f(x, y_0),$$

et que $f(x, y)$ tendra uniformément vers sa limite $f(x, y_0)$ pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à l'intervalle (A, A').

puisque, en vertu de la définition de la continuité (n° **164**) la différence $f(x, y) - f(x, y_0)$ peut être supposée moindre en valeur absolue que tel nombre positif ε que l'on voudra, pourvu que $y - y_0$ soit moindre, en valeur absolue qu'un nombre positif η, convenablement choisi, et cela, quelle que soit la valeur de x, pourvu qu'elle appartienne à l'intervalle (A, A').

Laissons de côté cette généralisation, et revenons au cas de fonctions $f_n(x)$ déterminées dans un ensemble (X) pour chaque valeur du nombre naturel n.

182. — Considérons une suite infinie $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ de fonctions de x dont chacune est une fonction déterminée de x dans l'ensemble (X) et supposons que, pour chaque valeur de x appartenant à cet ensemble, la série

$$(u) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

soit convergente : la somme de cette série pourra être regardée comme une fonction $f(x)$ déterminée dans l'ensemble (X) et cette fonction pourra être regardée, au sens qui a été expliqué au n° **179**, comme la limite, pour n infini, de la somme

$$f_n(x) = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

des n premiers termes de la série, somme qui est déterminée dans (X). Soit d'ailleurs $R_n = f(x) - f_n(x)$ le reste de la série limitée au n^e terme ; R_n est aussi une fonction de x déterminée dans (X).

La série (u) sera dite uniformément convergente dans (X) si à chaque nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre naturel p tel que l'on ait $|R_n| < \varepsilon$ pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à (X) et pour toutes les valeurs du nombre naturel n supérieures ou égales à p. Si la série (u) est uniformément convergente, il en est de même de son reste R_n, considéré comme la somme de la série $u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots$, et cela quel que soit n.

On définira, si l'on veut, la convergence uniforme, au sens large, en disant qu'à chaque nombre positif ε doit correspondre un nombre naturel n tel que l'on ait $|R_n(x)| < \varepsilon$, pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à (X).

Il n'y a aucune différence, même au point de vue de la généralité, entre ces notions et celles que l'on a exposées au n° **179**, puisque,

d'une part, si l'on se donne les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, on peut en déduire les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$, et que, d'autre part, si l'on se donne ces dernières fonctions, on peut en déduire les premières (n° **89**), en sorte que les exemples donnés au n° **179**, permettent de construire des séries qui ne seront pas uniformément convergentes, soit au sens large, soit au sens propre.

Si l'ensemble (X) est clos, si la série (u) est uniformément convergente, même au sens large, dans cet ensemble, et si ses termes $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ sont des fonctions continues de x dans (X), il en sera de même des fonctions $f_n(x)$, sommes d'un nombre fini de ces termes, et la somme $f(x)$ de la série sera continue dans (X).

183. — Soit

$$(a) \qquad a_1 + a_2 + \ldots + a_\alpha + \ldots$$

une série convergente dont les termes sont des nombres positifs.

I. — Soit, comme plus haut (u) une série dont les termes $u_1, u_2, \ldots, u_\alpha, \ldots$ sont des fonctions de x déterminées dans l'ensemble (X). Supposons qu'on ait $|u_\alpha| \leqq a_\alpha$ pour toutes les valeurs de x appartenant à cet ensemble et pour toutes les valeurs du nombre naturel α; on peut affirmer que la série (u) est absolument et uniformément convergente dans l'ensemble (X) : la convergence absolue de la série (u) est évidente, l'uniformité de la convergence résulte évidemment de ce que le reste de la série (u) est, en valeur absolue, au plus égal au reste de la série (a), qui peut être supposé aussi petit qu'on le veut. D'ailleurs, cette proposition a été déjà énoncée, sous une autre forme, au n° **179**, à propos des limites. Pourvu que les fonctions $u_1, u_2, \ldots$, soient bornées dans (X), la proposition subsiste évidemment si l'inégalité $|u_\alpha| \leqq a_\alpha$ n'a pas lieu pour les premiers termes de la série, en supposant, bien entendu, qu'elle soit vérifiée par tous les termes, à partir d'un certain rang.

Si l'ensemble (X) est clos et si les fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_\alpha, \ldots$ sont continues dans cet ensemble, il en est de même de la somme de la série (u).

II. — On a parfois à appliquer le théorème précédent dans un cas particulier, sur lequel il convient de s'arrêter un peu, afin de voir qu'il est bien compris dans le cas général.

Conservons à la série (a) la même signification : c'est une série convergente dont les termes sont des nombres positifs.

Supposons, en désignant par m un nombre naturel, qu'on veuille chercher la limite pour m infini, d'une somme

$$S(m) = v_1(m) + v_2(m) + \ldots + v_r(m),$$

dont chaque terme $v_\alpha(m)$ a, pour m infini, une limite v_α. L'existence et la valeur de la limite apparaissent immédiatement quand r est un nombre fixe. Il n'en est plus de même quand le nombre naturel r dépend de m et croît indéfiniment avec m : pour indiquer cette dépendance je poserai $r = \varphi(m)$: on a, d'après la supposition précédente, $\lim\limits_{m=\infty} \varphi(m) = +\infty$. Il est tout naturel de rechercher si la somme $S(m)$ n'aurait pas pour limite, quand m croît indéfiniment, la somme S de la série

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots,$$

lorsque cette série est convergente. Mon but est de démontrer qu'il en est ainsi lorsqu'on a, quel que soit le nombre naturel α, $|v_\alpha(m)| \leqq a_\alpha$, ce qui implique évidemment $|v_\alpha| \leqq a_\alpha$.

Il convient d'abord d'observer que, jusqu'à présent, $v_\alpha(m)$ n'a, pour une valeur donnée du nombre naturel α, de sens que si m est assez grand pour que $\varphi(m)$ soit au moins égal à α, ce qui finit toujours par avoir lieu en vertu de l'hypothèse $\lim\limits_{m=\infty} \varphi(m) = +\infty$. Afin que la fonction $v_\alpha(m)$ soit définie pour chaque valeur du nombre naturel m, je conviendrai de poser $v_\alpha(m) = 0$ pour toute valeur de m telle que $\varphi(m)$ soit inférieur à α : cette supposition laisse évidemment subsister les conditions

$$\lim_{m=\infty} v_\alpha(m) = v_\alpha, \qquad |v_\alpha(m)| \leqq a_\alpha ;$$

la somme $S(m)$ apparaît alors comme la somme d'une série convergente dont tous les termes à partir de celui qui occupe le rang $r = \varphi(m)$, sont nuls. Nous nous rapprochons évidemment du théorème démontré dans la première partie du présent numéro. Considérons maintenant l'ensemble clos (X) dont les éléments sont

le nombre o et les inverses des nombres naturels ; cet ensemble (X) admet pour point unique d'accumulation le point o : posons, pour $x = \frac{1}{m}$ et pour toutes les valeurs du nombre naturel α,

$$v_\alpha(m) = u_\alpha(x), \quad \text{puis} \quad \lim_{m=\infty} v_\alpha(m) = v_\alpha = u_\alpha(0).$$

La fonction $u_\alpha(x)$ est définie dans l'ensemble (X), elle y est continue au point d'accumulation o ; on a d'ailleurs $|u_\alpha(x)| \leq a_\alpha$ pour chaque nombre naturel α et chaque valeur de x appartenant à (X) ; le théorème I s'applique donc, la somme de la série (u), qui, pour $x = \frac{1}{m}$, est égale à $S(m)$, est une fonction continue de x dans (X), sa valeur pour $x = 0$ est la somme S de la série $v_1 + v_2 + \ldots$ et il est bien prouvé qu'on a

$$\lim_{m=\infty} S(m) = S.$$

184. — Je vais donner immédiatement une application importante de la proposition I du numéro précédent aux séries de la forme

$$(1) \qquad a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots.$$

qui ont, en analyse, une importance considérable : $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sont des coefficients numériques et x une variable : on dit qu'une telle série est *ordonnée suivant les puissances entières et positives* de x ; on la désigne encore sous le nom de *série entière en x*, ou de *série de Taylor*. Lorsqu'elle est convergente pour toutes les valeurs de x, on dit que sa somme est une fonction (transcendante) entière de x [1].

Soit, en général, a'_n la valeur absolue du coefficient a_n de la série (1) : supposons que l'on connaisse un nombre positif A tel

[1] Conformément à l'usage adopté par plusieurs auteurs, je supprimerai à l'occasion l'épithète « transcendante ». Il y a toutefois lieu de prévenir une confusion possible : en disant *série* entière en x, je ne supposerai pas que la série soit convergente pour toutes les valeurs de x ; en disant *fonction* entière de x, je suppose essentiellement que la série (entière en x) qui représente cette fonction soit convergente quel que soit x.

que la série à termes positifs

$$(2)\qquad a'_0 + a'_1 A + a'_2 A^2 + \ldots + a'_n A^n + \ldots$$

soit convergente : on est sûr alors que la série (1) est absolument et uniformément convergente dans l'intervalle (— A, A), où sa somme est une fonction continue de x. Cette fonction peut se mettre sous la forme

$$(3)\qquad a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n + \theta x^{n+1}$$

analogue à celle d'un polynome : θ désigne une fonction de x, donc on peut affirmer qu'elle reste, dans l'intervalle (— A, A) inférieure ou égale, en valeur absolue, à la somme de la série convergente

$$a'_{n+1} + a'_{n+2} A + a'_{n+3} A^2 + \ldots$$

On a insisté au n° **173** sur diverses propriétés des fonctions de la forme (3) où θ reste, comme ici, inférieur en valeur absolue à un nombre fixe. En particulier, on sait que deux expressions de cette forme, qui se terminent à une même puissance de x, ne peuvent sans être identiques terme à terme, être égales pour une infinité de valeurs de x voisines de o. On en conclut que deux séries entières en x, qui seraient toutes deux absolument convergentes pour $x = A$, ne peuvent sans être identiques, terme à terme, représenter la même fonction de x dans l'intervalle (— A, A). C'est là une proposition que l'on complètera plus tard.

185. — Enfin je veux dire un mot des séries telles que

$$\varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) + \ldots + \varphi_n(x, y) + \ldots$$

dont les termes sont des fonctions de deux variables, en me bornant au cas où ces fonctions sont, comme on l'a expliqué au n° **165**, définies dans l'ensemble (XY) dont les éléments sont les couples de valeurs x, y qui satisfont aux conditions

$$(1)\qquad a \leq x \leq a', \qquad b \leq y \leq b' ;$$

si pour chacun de ces couples, la série est convergente, il est clair que sa somme définit une fonction $f(x, y)$ dans (XY) : la série sera

dite uniformément convergente, dans ce même ensemble, si à chaque nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre naturel p tel que l'on ait, en désignant par $f_n(x, y)$ la somme des n premiers termes de la série proposée,

$$|f(x, y) - f_n(x, y)| < \varepsilon,$$

sous la condition $n > p$, et sous les conditions (1). C'est ce qui arrivera, en particulier si, la série à termes positifs

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

étant convergente, on a, sous les conditions (1), et quel que soit n,

$$|\varphi_n(x, y)| \leq a_n.$$

Si la série proposée est uniformément convergente, dans l'ensemble (XY) et si, en outre, les fonctions $\varphi_n(x, y)$ sont continues dans le même ensemble, la somme $f(x, y)$ sera aussi continue dans (XY), et l'on pourra, à chaque nombre positif ε faire correspondre un nombre naturel p et un nombre positif η tel que l'on ait

$$|f(x, y) - f_n(x', y')| < \varepsilon,$$

sous les conditions $n > p$, $|x' - x| < \eta$, $|y' - y| < \eta$ et sous les conditions (1).

La démonstration est la même que pour les séries dont les termes ne dépendent que d'une variable.

186. — Il est à peine utile de dire que la considération des produits infinis donne lieu à des propositions toutes pareilles à celles qu'on vient de développer pour les séries.

Si $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ désignent des fonctions de x déterminées dans l'ensemble clos (X), et si, pour chacune des valeurs de x qui appartiennent à cet ensemble, le produit

$$g(x) = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + u_n),$$

est absolument convergent, il définit une fonction de x, déterminée dans (X), qui pourra être regardée comme la limite, pour n infini, du produit $g_n(x)$ des n premiers facteurs du produit infini. Ce

dernier sera dit uniformément convergent dans l'ensemble (X) si, à chaque nombre positif ε, on peut faire correspondre un nombre naturel p tel que l'on ait,

$$|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon,$$

pour toutes les valeurs du nombre naturel $n > p$ et pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à (X).

Si le produit est uniformément convergent dans (X) et si, dans le même ensemble, les fonctions u_1, u_2, ..., u_n, ... sont continues, il en est de même de la fonction $g(x)$.

Si, en particulier, on connaît une suite infinie de nombres positifs a_1, a_2, ..., a_n, ..., tels que la série $\sum a_n$ soit convergente, et que l'on ait pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à (X) $|u_n| < a_n$, on est assuré que le produit infini est absolument et uniformément convergent.

En effet le produit infini à termes positifs $\prod_{n=1}^{n=\infty}(1 + a_n)$ est alors convergent, et si l'on désigne par A_n le produit de ses n premiers facteurs, il est aisé de voir (n° **119**) que, si l'on suppose $m > n$, on a $|g_m(x) - g_n(x)| \leq A_m - A_n$; on est ramené à la proposition du n° **179**.

Par exemple le produit $\prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$ est absolument et uniformément convergent dans tout intervalle : il définit une fonction de x continue dans tout intervalle.

La proposition II du n° **183** a aussi sa correspondante ici. En reprenant les hypothèses et les notations de ce n° **183**, on peut affirmer que le produit

$$P(m) = [1 + v_1(m)]\,[1 + v_2(m)]\ldots[1 + v_r(m)]$$

a une limite et que cette limite est la valeur du produit absolument convergent

$$P = \prod_{\alpha=1}^{\alpha=\infty}(1 + v_\alpha).$$

Les explications que l'on a données au n° **183** suffisent à montrer que cette proposition est un cas particulier de celle qui précède.

II. — FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

187. — Après avoir établi ces propositions générales, je vais m'arrêter un peu sur quelques fonctions particulières, qui serviront d'exemples, et qui tiennent d'ailleurs, en analyse, un rôle essentiel.

Considérons d'abord la série

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots;$$

on a vu au n° **95** que, si A était un nombre positif quelconque, la série

$$1 + \frac{A}{1} + \frac{A^2}{1.2} + \ldots + \frac{A^n}{1.2\ldots n} + \ldots$$

était convergente. La série proposée est donc absolument et uniformément convergente dans l'intervalle $(-A, A)$, c'est-à-dire dans tout intervalle : sa somme $f(x)$ est une fonction continue dans tout intervalle. La règle de multiplication des séries permet (n° **115**) de reconnaître que cette fonction jouit de la propriété

$$f(x) \times f(y) = f(x+y),$$

en sorte que la fonction $f(x)$ est de la forme a^x (n° **177**), en désignant par a un nombre positif, que l'on déterminera en remarquant qu'il doit être égal à $f(1)$, c'est-à-dire à la somme de la série

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n} + \ldots.$$

Cette somme est un nombre que l'on désigne habituellement par e et qui joue un rôle considérable en analyse : on a calculé au n° **95** une expression approchée du reste des séries de l'espèce con-

sidérée, et l'on conclut de suite de cette forme que l'on peut écrire

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n} + \frac{\theta}{1.2\ldots n.n},$$

θ étant un nombre compris entre o et 1 ; cette formule permet de calculer e avec telle approximation que l'on veut : on a

$$e = 2.718281828459045235 36\ldots$$

La même formule montre que e est irrationnel ; si en effet il était égal à la fraction irréductible $\frac{m}{n}$, on aurait

$$\frac{m}{n} - 1 - \frac{1}{1} - \frac{1}{1.2} - \ldots - \frac{1}{1.2\ldots n} = \frac{\theta}{1.2\ldots n.n};$$

en multipliant les deux membres par $1.2\ldots n$, le premier deviendrait entier ; le second se réduirait à $\frac{\theta}{n}$ quantité qui ne peut jamais être un nombre entier, même nul. On doit à Ch. Hermite d'avoir établi que e est un nombre transcendant, c'est-à-dire que e n'est racine d'aucune équation algébrique entière à coefficients rationnels.

Il résulte de ce qui précède que l'on a

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \ldots \pm \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots;$$

ces égalités, valables quel que soit x, sont particulièrement avantageuses quand on veut calculer e^x pour de petites valeurs de x. On voit par exemple qu'on peut prendre 0,9 pour valeur approchée de $\frac{1}{\sqrt[10]{e}}$, avec une erreur par défaut moindre que $\frac{1}{200}$.

Je reviendrai bientôt sur cette fonction e^x.

188. — Considérons encore la série

$$(1) \quad 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1,2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1,2\ldots n}x^n + \ldots,$$

qui, lorsque m est un nombre naturel, se réduit à un polynome en x, le développement de $(1+x)^m$. Si l'on regarde x et m comme des variables, ses termes sont des polynomes par rapport à ces deux variables.

Soient A un nombre positif quelconque et α un nombre positif plus petit que 1, la série à termes positifs

$$1+\frac{A}{1}\alpha+\frac{A(A+1)}{1.2}\alpha^2+\ldots+\frac{A(A+1)\ldots(A+n-1)}{1.2\ldots n}\alpha^n+\ldots$$

est convergente, car le rapport du $(n+1)^e$ terme de cette série au n^e tend vers 0 quand n augmente indéfiniment. Or, pourvu que l'on ait $|m| \leqq A$, $|x| \leqq \alpha$, les termes de la série proposée sont, en valeur absolue, inférieurs ou égaux aux termes, tous positifs, de la série qu'on vient d'écrire. D'où les conclusions suivantes :

La série (1) est uniformément convergente dans l'ensemble (MX) des couples de valeurs de m et de x qui vérifient les conditions $|m| \leqq A$, $|x| \leqq \alpha$; elle est continue dans le même ensemble. Elle est, par conséquent, continue quand on fixe l'une des variables et qu'on la regarde comme une fonction de l'autre. Enfin si l'on veut avoir la valeur de la somme pour un système particulier de valeurs x', m', satisfaisant aux conditions imposées, il suffira de prendre assez de termes et de donner aux variables x, m des valeurs suffisamment approchées de x' et de m' pour obtenir une valeur aussi voisine qu'on voudra de la somme cherchée.

Je vais montrer, d'après Abel [1] que la somme de la série (1) est égale à $(1+x)^m$, pourvu que la valeur absolue de x soit inférieure à 1.

Regardons, en effet, x comme une constante, inférieure à 1 en valeur absolue ; la somme de la série (1) est alors une fonction de m définie pour toute valeur de m, et continue dans tout intervalle, puisque dans les raisonnements précédents, A est un nombre positif quelconque. Multiplions, en appliquant la règle du n° **114**, la série (1) par la série

$$(2) \qquad \varphi(n) = 1+\frac{n}{1}x+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\ldots.$$

[1] *Œuvres*, 2e édition, t. I, p. 219.

l'application de cette règle est légitime, puisque les deux séries (1), (2) sont absolument convergentes ; on aura

$$\varphi(m) \times \varphi(n) = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_p x^p + \ldots,$$

$A_1, A_2, \ldots, A_p$ étant des fonctions de m et de n qu'il est facile de former. Si la proposition énoncée est vraie, il est clair qu'on doit avoir

(3) $$\varphi(m) \times \varphi(n) = \varphi(m+n).$$

A_p doit donc être égal au coefficient de x^p dans $\varphi(m+n)$, c'est-à-dire qu'on doit avoir

(3) $$A_p = \frac{(m+n)(m+n-1)\ldots(m+n-p+1)}{1.2\ldots p}.$$

C'est ce qu'il est bien aisé de vérifier pour les petites valeurs de p, et de démontrer ensuite par induction. Mais cette démonstration n'est pas nécessaire. En effet d'une part, l'égalité (3) est certaine quand m et n sont des nombres naturels, puisque dans ce cas, $\varphi(m)$, $\varphi(n)$, $\varphi(m+n)$ ne sont autre chose que les développements (limités) de $(1+x)^m$, $(1+x)^n$, $(1+x)^{m+n}$, et le coefficient de x^p dans le développement de $(1+x)^{m+n}$ doit être égal au coefficient de x^p dans le produit du développement de $(1+x)^m$ par le développement de $(1+x)^n$.

Dans le cas général, les deux membres de l'égalité (3) sont comme il est aisé de le voir, des polynomes en m, n, de degré p ; ces polynomes prennent des valeurs numériques égales pour toutes les valeurs entières et positives de m, n : il est bien aisé d'en conclure qu'ils sont identiques.

L'égalité (3) est donc établie.

Donnons à x une valeur fixe, plus petite que 1 en valeur absolue ; $\varphi(m)$ est une fonction de m continue dans tout intervalle et la propriété de cette fonction qu'exprime l'égalité (3) montre (n° **177**), que l'on a $\varphi(m) = A^m$, A étant une certaine constante positive qu'on déterminera immédiatement en faisant $m = 1$; on trouve ainsi $A = \varphi(1) = 1 + x$, l'égalité

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots p}x^p + \ldots$$

est donc démontrée, quel que soit m, pourvu que la valeur absolue de x soit inférieure à 1. C'est la formule connue sous le nom de formule du binome.

Notons, comme cas particuliers, les égalités

$$(1-x)^{-m} =$$

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m+1)}{1.2}x^2+\ldots+\frac{m(m+1)\ldots(m+p-1)}{1.2\ldots p}x^p+\ldots$$

ou, lorsque m est entier,

$$\frac{1.2.3\ldots(m-1)}{(1-x)^m}=1.2.3\ldots(m-1)+2.3.4\ldots m x+3.4.5\ldots(m+1)x^2+\ldots$$

$$+(p+1)(p+2)(p+3)\ldots(p+m-1)x^p+\ldots;$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots 2p}x^{2p}+\ldots.$$

La première a été utilisée aux nos **131**, **133**.

189. — On parvient à la série

$$\varphi(x)=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}+\ldots,$$

dont on a prouvé plus haut qu'elle était égale à e^x, en cherchant la limite, pour n infini, de $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Je n'invoquerai pas, dans ce qui suit, le fait que la somme $\varphi(x)$ de cette série est égale à e^x : ce fait résultera à nouveau de la démonstration même.

Si l'on suppose $|n|>x$, on peut appliquer la formule du binome, et écrire

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+\frac{nx}{1\,n}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{x^2}{n^2}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p}\frac{x^p}{n^p}+\ldots,$$

Si n est un nombre naturel, tous les termes de degré supérieur à n ont des coefficients nuls, mais la formule est valable dans tous

les cas; en remplaçant n par $\frac{1}{z}$, elle devient

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = (1+zx)^{\frac{1}{z}} = f(x, z),$$

en posant

$$(1)\quad \begin{cases} f(x,z) = \\ 1+\frac{x}{1}+(1-z)\frac{x^2}{1.2}+\ldots+(1-z)(1-2z)\ldots[1-(p-1)z]\frac{x^p}{1.2\ldots p}+\ldots; \end{cases}$$

Si l'on désigne par a, b deux nombres poeitifs fixes, la série à termes positifs

$$(2)\quad 1+\frac{b}{1}+(1+b)\frac{a^2}{1.2}+\ldots+(1+b)(1+2b)\ldots[1+(p-1)b]\frac{a^p}{1.2\ldots p}+\ldots$$

est convergente pourvu que l'on ait $ab < 1$, puisque le rapport du $(p+2)^e$ terme au $(p+1)^e$ est $\frac{(1+pb)\,a}{p+1}$ et que la limite de ce rapport pour p infini, est ab. En supposant donc $ab < 1$, on voit que la série (1) est absolument et uniformément convergente dans l'ensemble (XZ) dont les éléments sont les couples de valeurs de x et de z qui satisfont aux conditions $|x| \leqq a$, $|z| \leqq b$. Dans ce même ensemble la fonction des deux variables $f(x, z)$ est continue; sa limite pour $z=0$ s'obtient simplement en faisant $z=0$ dans les coefficients de la série, elle est $\varphi(x)$. De plus, quelque petit que soit le nombre positif ε, on peut lui faire correspondre un nombre positif η tel que l'on ait, pourvu que x, x' soient moindres en valeur absolue que a,

$$\varphi(x) - (1+zx')^{\frac{1}{z}} < \varepsilon,$$

sous les conditions $|x-x'| < \eta$, $|z| < \eta$.

Il revient au même de dire qu'on peut faire correspondre à chaque nombre positif ε deux nombres positifs η et P tels que l'on ait

$$\left|\varphi(x) - \left(1+\frac{x'}{n}\right)^n\right| < \varepsilon$$

sous les conditions $|x| < a$, $|x'| < a$ $|x-x'| < \eta$, $|n| > \mathrm{P}$; on peut prendre P égal ou supérieur à $\frac{1}{\eta}$.

La démonstration précédente subsisterait si l'on voulait se borner à considérer des valeurs naturelles de n, de manière à n'utiliser la formule du binome que pour ce cas. Seulement, alors, la variable z ne peut prendre que des valeurs appartenant à l'ensemble des fractions $\frac{1}{n}$, ensemble qui admet 0 pour point d'accumulation [1]. On pourrait aussi, dans ce cas appliquer la proposition II du n° **183**.

190. — Si α, β tendent vers 0 de manière que le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ tende vers une limite λ, l'expression $(1+\alpha)^{\frac{1}{\beta}}$ tendra vers la limite $\varphi(\lambda)$: il suffit, pour le voir, de supposer dans la proposition qui précède

$$x' = \frac{\alpha}{\beta}, \qquad z = \beta, \qquad x = \lambda.$$

Enfin dans tout ceci, on ne s'est point servi de ce que $\varphi(x)$ était égal à e^x, et cette proposition peut être regardée comme une conséquence de ce que l'on vient de dire.

En effet, si l'on regarde, comme on l'a fait plus haut, $\varphi(1)$ comme la définition du nombre e, il est clair que l'on aura

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{z=0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = \varphi(1) = e.$$

On a d'ailleurs, en posant $\frac{x}{n} = \alpha$,

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^x;$$

si n augmente indéfiniment, ou si α tend vers 0, la quantité entre crochets, dans le second membre, tend vers e, et le second membre tend vers e^x, à cause de la continuité de la fonction x^m ; on a donc

$$\varphi(x) = \lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

[1] Dans l'introduction des *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques* que j'ai publiée avec M. MOLK (t. I, p. 101), j'ai reproduit une démonstration très simple, relative au cas où n croît par valeurs entières et positives, qui est due à M. DARBOUX.

191. — On a vu comment la propriété fondamentale

$$e^{x+y} = e^x . e^y$$

de la fonction e^x apparaît sur la série

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 . 2} + \dots + \frac{x^n}{1 . 2 \dots n} + \dots.$$

Sur cette même série, la continuité apparaît aussi facilement (n° **184**) ; enfin, les coefficients des diverses puissances de x étant positifs, on voit que e^x est une fonction croissante pour x positif ; il en est de même pour x négatif, à cause de l'égalité $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$; quand x croît de $-\infty$ à $+\infty$, e^x toujours positif, croît de 0 à $+\infty$; e^x, lorsque x croît par valeurs positives, croît plus vite que n'importe quel polynome $g(x)$; on entend par là que le rapport $\frac{g(x)}{e^x}$ tend vers 0 ; il suffit, pour le voir, de remplacer e^x par la somme des $p+1$ premiers termes de la série, en supposant p supérieur au degré de $g(x)$; on a ainsi une fraction rationnelle, plus grande en valeur absolue que $\frac{g(x)}{e^x}$, et qui tend vers 0. Cette dernière propriété s'étend évidemment à toute fonction de x qui serait définie par une série entière en x, convergente quel que soit x, et ayant ses coefficients positifs. On voit aussi que l'on a quelque soit le polynome $g(x)$

$$\lim_{x=+\infty} \left[g(x) e^{-x} \right] = 0.$$

On verrait de même que, quel que soit le nombre positif m, l'expression $\frac{x^m}{e^x}$ ou $x^m e^{-x}$ tend vers 0 quand x augmente indéfiniment.

Il résulte de là qu'aucune relation de la forme

$$\mathrm{A}e^{\alpha x} + \mathrm{B}^{\beta x} + \dots + \mathrm{L}e^{\lambda x} + \mathrm{M} = 0,$$

où $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ sont des constantes et A, B, ..., L, M des polynomes en x, ne peut avoir lieu pour toutes les valeurs de x. En effet, il est permis, sans diminuer la généralité, de supposer dans la relation précédente que tous les nombres $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ sont négatifs,

puisqu'on ramènerait la relation précédente à ce cas en divisant les deux membres de la relation précédente par celle des fonctions $e^{\alpha x}, e^{\beta x}, \ldots, e^{\lambda x}$, qui correspond au plus grand des nombres $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$. On peut aussi supposer $\alpha > \beta > \ldots > \lambda$. En faisant croître x indéfiniment, on voit que si l'égalité précédente était vraie, M devrait tendre vers o, cela n'est possible que si M est identiquement nul; en multipliant ensuite l'identité précédente par $e_{-\lambda x}$ et en raisonnant de la même façon, on voit que L doit être identiquement nul, etc. En particulier, on voit qu'il ne peut exister aucun polynome $f(x, y)$ entier en x et y qui devienne nul pour toutes les valeurs de x quand on y remplace y par e^x, c'est ce qu'on exprime en disant que e^x n'est pas une fonction algébrique de x, ou que e^x est une fonction transcendante.

192. — On appelle logarithme naturel ou logarithme néperien d'un nombre positif x le logarithme de ce nombre pris dans la base e; le symbole log sera réservé désormais aux logarithmes naturels; on a ainsi, par définition,

$$e^{\log x} = x.$$

En désignant par $\log_a x$ le logarithme du nombre x dans la base a et en prenant les logarithmes naturels des deux membres de la formule

$$a^{\log_a x} = x,$$

on trouve

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a},$$

et l'on voit comment on peut passer du système de logarithmes naturels à un système de logarithmes quelconques.

Le nombre $\frac{1}{\log 10}$, par lequel il faut multiplier les logarithmes naturels pour avoir les logarithmes vulgaires (à base 10) est

$$M = 0,4342944819\ldots;$$

on passe des logarithmes vulgaires aux logarithmes naturels en

multipliant les premiers par

$$\frac{1}{M} = 2,302585093o$$

(valeur approchée par excès).

On a en désignant par m un nombre positif quelconque et en supposant que la variable x reste toujours positive,

$$\lim_{x=0} x^m \log x = 0, \qquad \lim_{x=+\infty} \frac{\log x}{x^m} = 0;$$

comme on le voit de suite en posant $x = e^z$, et en faisant tendre z vers $-\infty$ ou vers $+\infty$. Le même changement de variable montre aisément que $\log x$ ne peut être une fonction algébrique de x.

L'identité

$$a^x = e^{x \log a},$$

qui devient évidente en prenant les logarithmes naturels des deux membres, montre que l'on a, quel que soit le nombre positif a,

$$a^x = 1 + \frac{x \log a}{1} + \frac{(x \log a)^2}{1.2} + \ldots + \frac{(x \log a)^p}{1.2\ldots p} + \ldots.$$

De cette égalité on déduit la suivante :

$$\frac{a^x - 1}{x} = \log a + \frac{x(\log a)^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^{p-1}(\log a)^p}{1.2\ldots p} + \ldots,$$

dont le second membre est une fonction continue de x ; en faisant tendre x vers 0, on voit que le second membre a pour limite $\log a$; telle est donc aussi la limite, pour $x = 0$, de

$$\frac{a^x - 1}{x},$$

En remplaçant x par $\frac{1}{m}$ et a par x, on arrive à la conclusion suivante : lorsque m augmente indéfiniment par valeurs naturelles, l'expression

$$m(\sqrt[m]{x} - 1),$$

où x est un nombre positif quelconque, a pour limite $\log x$. Cette

propriété du logarithme népérien répond à la propriété de e^x d'être la limite de

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m$$

quand m augmente indéfiniment.

193. — Soit x un nombre positif plus petit que 1 en valeur absolue, on vient de voir qu'on a

$$\log(1+x) = \lim_{z=0} \frac{(1+x)^z - 1}{z};$$

la quantité, dont il faut prendre la limite pour $z = 0$, n'est autre (n° **188**) que la somme de la série

$$\varphi(x, z) = \frac{x}{1} - (1-z)\frac{x^2}{2} + (1-z)\left(1-\frac{z}{2}\right)\frac{x^3}{3} + \ldots$$
$$+ (-1)^{p-1}(1-z)\left(1-\frac{z}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{z}{p-1}\right)\frac{x^p}{p} + \ldots.$$

Or, si l'on désigne, par a, b deux nombres positifs dont le premier est plus petit que 1, on voit de suite en comparant le p^e terme au précédent, que la série à termes positifs

$$\frac{a}{1} + (1+b)\frac{a^2}{2} + (1+b)\left(1+\frac{b}{2}\right)\frac{a^3}{3} + \ldots$$
$$+ (1+b)\left(1+\frac{b}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{b}{p-1}\right)\frac{a^p}{p} + \ldots$$

est convergente ; on en conclut que la fonction $\varphi(x, z)$ est continue dans l'ensemble (XZ) dont les éléments sont les couples de valeurs de x, z qui vérifient les conditions $|x| \leqq a$, $|z| \leqq b$.

En particulier la limite de sa somme, pour $z = 0$, s'obtiendra en remplaçant simplement z par 0 dans les coefficients ; on aura donc

$$(1) \qquad \log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{p-1}\frac{x^p}{p} + \ldots.$$

Le second membre est encore convergent pour $x = 1$; il résulte d'une proposition qui sera établie plus tard que la somme de la série

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{p-1}}{p} + \ldots$$

est bien $\log 2$; pour $x = -1$ le second membre de l'égalité (1) est une série divergente ; au surplus $\log(1+x)$, pour $x = -1$, n'a pas de sens.

Si dans la formule (1) on remplace x par $-x$, on trouve, en supposant toujours $|x| < 1$,

$$\log(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots ;$$

on a donc

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\right);$$

en remplaçant dans cette formule x par $\frac{h}{2n+h}$, on obtient la formule suivante qui, lorsqu'on y regarde n comme un nombre naturel et h comme un nombre plus petit que 1, permet de justifier la règle bien connue pour l'interpolation et qui, lorsqu'on y fait $h = 1$, permet de calculer de proche en proche les logarithmes des nombres entiers

$$\log(n+h) - \log n = 2\left[\frac{h}{2n+h} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{(2n+h)^3} + \frac{1}{5}\frac{h^5}{(2n+h)^5} + \dots\right].$$

194. — Lorsque x est positif et plus petit que 1, $\log(1+x)$ est compris entre x et $x - \frac{x^2}{2}$ (n° **137**). On peut donc écrire

$$\log(1+x) = x - \theta x^2,$$

θ étant une certaine fonction de x, dont la valeur reste comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$; en désignant par n un nombre naturel et en remplaçant dans cette formule x par $\frac{1}{n}$ et θ par θ_n, elle devient

$$\log(n+1) - \log n = \frac{1}{n} - \frac{\theta_n}{n^2},$$

d'où, en remplaçant successivement n par 1, 2, ... et en ajoutant,

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log(n+1) = \frac{\theta_1}{1^2} + \frac{\theta_2}{2^2} + \dots + \frac{\theta_n}{n^2};$$

si l'on fait croître n indéfiniment, le second membre tend évidem-

ment vers une limite, puisque la série $\sum \frac{\theta_n}{n}$ dont les termes sont positifs et moindres que les termes de la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente. Le premier membre ou, si l'on veut, la différence

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n$$

tend par conséquent vers une limite, évidemment positive. Cette limite porte le nom de constante d'Euler ; sa valeur est

$$C = 0,577215664901532\ldots$$

Cet important résultat met bien en lumière la possibilité d'approcher d'une limite quelconque, en intervertissant l'ordre des termes de la série non absolument convergente ;

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots ;$$

si l'on pose en effet

$$S_n = \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p} = \log n + C + \varphi(n),$$

$$S'_{2n-1} = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{1}{2r-1}, \qquad S'_{2n} = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{1}{2r} = \frac{1}{2} S_n,$$

on aura $\lim\limits_{n=\infty} \varphi(n) = 0$, puis

$$S'_{2n-1} - S'_{2p} = S_{2n} - \frac{1}{2} S_n - \frac{1}{2} S_p$$
$$= \frac{1}{2}\log\frac{n}{p} + \log 2 + \varphi(2n) - \frac{1}{2}\varphi(n) - \frac{1}{2}\varphi(p),$$

et il est clair que si n et p augmentent indéfiniment de façon que le rapport $\frac{n}{p}$ tende vers une limite h, la limite du second membre sera $\log 2 + \frac{1}{2}\log h$.

195. — On appelle cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique,

tangente hyperbolique de x les fonctions définies par les formules

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$

qui, en posant $e^x = y$, deviennent

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right), \qquad \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right), \qquad \operatorname{th} x = \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1}.$$

Les fonctions $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ sont continues dans tout intervalle ; en se rappelant que lorsque x croit de 0 à $+\infty$, y croit de 1 à $+\infty$, on voit de suite, que dans les mêmes conditions, $\operatorname{ch} x$ croit de 1 à $+\infty$, $\operatorname{sh} x$ de 0 à $+\infty$, $\operatorname{th} x$ de 0 à 1. Les formules

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x, \qquad \operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x, \qquad \operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x,$$

achèvent de faire connaître la façon dont varient ces mêmes fonctions quand x est négatif.

Des définitions de ces fonctions on tire de suite les relations

$$e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x, \qquad e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x;$$

d'où l'on déduit

$$e^{x+y} = (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y) = \operatorname{ch}(x + y) + \operatorname{sh}(x + y),$$
$$e^{-x-y} = (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)(\operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y) = \operatorname{ch}(x + y) - \operatorname{sh}(x - y);$$

en ajoutant, retranchant, divisant membre à membre, faisant $x = -y$, ..., on obtient

$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{th}(x + y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y},$$

$$1 = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x.$$

Notons encore les formules

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots,$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \dots,$$

qui mettent aussi en évidence le sens de la variation de ch x, sh x.

196. — De l'étude des variations des fonctions sh x, th x, il résulte qu'il existe une valeur de x et une seule qui fait acquérir à la première une valeur donnée z quelconque, à la seconde une valeur donnée z comprise entre -1 et $+1$; ces valeurs sont respectivement

$$\log(z + \sqrt{z^2 + 1}), \qquad \log\sqrt{\frac{1+z}{1-z}},$$

en donnant aux radicaux la signification arithmétique : telles sont les fonctions inverses de sh x, th x ; ces fonctions inverses sont du même signe que z et croissent, de $-\infty$ à $+\infty$, quand z, pour la première, croît de $-\infty$ à $+\infty$, et pour la seconde, de -1 à $+1$. Quant à ch x, il y a deux valeurs symétriques de x qui lui font acquérir une valeur donnée z, que l'on doit supposer plus grande que 1 ; la valeur positive est

$$\log(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

en donnant toujours au radical sa signification arithmétique : on peut *choisir* la fonction précédente comme étant la fonction inverse de ch x ; elle croît de 0 à $+\infty$, quand z croît de 1 à $+\infty$.

Si l'on veut rappeler l'origine des fonctions de z

$$\log(z + \sqrt{z^2 + 1}), \qquad \log\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}, \qquad \log(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

que l'on vient de définir, on pourra les désigner respectivement par les symboles

$$\operatorname{ash} x, \qquad \operatorname{ath} x, \qquad \operatorname{ach} x.$$

197. — Une méthode analogue à celle que l'on a suivie au n° **189** pour obtenir l'expression de la limite de $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ peut

servir, ainsi qu'Euler l'a montré [1], à déduire des propositions les plus élémentaires de la trigonométrie les développements en série des fonctions $\cos x$ et $\sin x$; tout en suivant la même marche, c'est à un point de vue un peu différent que je me placerai.

On définit les fonctions $\sin x$ et $\cos x$, au début de la trigonométrie, par des considérations géométriques ; il y a un intérêt évident à introduire dans l'analyse le moins possible de données expérimentales, et il importe par conséquent de donner des fonctions $\sin x$ et $\cos x$ une définition qui repose uniquement sur la notion de nombre et n'emprunte rien à l'idée d'espace.

On établit encore par des considérations géométriques les formules

$$(1) \quad \begin{cases} \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \\ \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b. \end{cases}$$

Je vais montrer (en supposant d'abord leur existence) comment on peut déterminer toutes les fonctions continues $\varphi(x)$, $\psi(x)$ qui jouissent des propriétés définies par les formules

$$(2) \quad \begin{cases} \varphi(a+b) = \varphi(a)\varphi(b) - \psi(a)\psi(b), \\ \psi(a+b) = \psi(a)\varphi(b) + \psi(b)\varphi(a), \end{cases}$$

et satisfont en outre à une autre condition qui sera introduite plus tard.

Si, après avoir élevé au carré, on ajoute les équations (2) membre à membre, on obtient

$$\varphi^2(a+b) + \psi^2(a+b) = [\varphi^2(a) + \psi^2(a)][\varphi^2(b) + \psi^2(b)].$$

Cette égalité montre que la fonction $f(x) = \varphi^2(x) + \psi^2(x)$ jouit de la propriété $f(x+y) = f(x) \times f(y)$; si on exclut le cas où cette fonction serait identiquement nulle, on voit (nº **177**) qu'elle est de la forme A^x, ou, ce qui revient au même, e^{gx}, g étant une certaine constante numérique.

Mais il est clair que, si les fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ jouissent des propriétés qu'expriment les équations (2), il en est de même des fonctions $e^{-\frac{g}{2}x}\varphi(x)$, $e^{-\frac{g}{2}x}\psi(x)$: si l'on pose

$$e^{-\frac{g}{2}x}\varphi(x) = \cos x, \qquad e^{-\frac{g}{2}x}\psi(x) = \sin x,$$

(1) *Introductio in analysin infinitorum*, § **134**.

en désignant par $\cos x$ et $\sin x$ des fonctions dont on suppose seulement qu'elles sont continues et qu'elles satisfont aux équations (1), on devra, à cause de la relation $\varphi^2(x) + \psi^2(x) = e^{2\lambda x}$, avoir

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \tag{3}$$

tout revient à déterminer les fonctions inconnues $\sin x$ et $\cos x$ par les relations (1) et (3). Si d'ailleurs on fait $b = 0$ dans les équations (1) et que l'on résolve par rapport à $\cos 0$ et à $\sin 0$ les équations que l'on obtient, on trouve $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$; j'ajoute maintenant cette condition que le rapport $\frac{\sin x}{x}$, quand on fait tendre x vers zéro, ait l'unité pour limite.

L'application répétée des formules (1) conduit, par un procédé bien connu, aux relations suivantes :

$$\cos(a + b + \ldots + l) = \cos a \cos b \ldots \cos l\,(1 - \Sigma_2 + \Sigma_4 - \ldots),$$

$$\sin(a + b + \ldots + l) = \cos a \cos b \ldots \cos l\,(\Sigma_1 - \Sigma_3 + \Sigma_5 - \ldots),$$

où, en supposant $\operatorname{tg} x$ mis pour abréger à la place de $\frac{\sin x}{\cos x}$, on regarde $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \ldots$, comme la somme, la somme des produits deux à deux, la somme des produits trois à trois, .., des quantités $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{tg} b$, ..., $\operatorname{tg} l$; en supposant les quantités $a, b, \ldots, l$ en nombre égal à m, en les prenant toutes égales et en remplaçant enfin a par $\frac{x}{m}$, les formules précédentes deviennent [1] :

$$\frac{\cos x}{\cos^m \frac{x}{m}} = 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\frac{\left(m \operatorname{tg}\frac{x}{m}\right)^2}{1.2} + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\left(1 - \frac{3}{m}\right)\frac{\left(m \operatorname{tg}\frac{x}{m}\right)^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

$$\frac{\sin x}{\cos^m \frac{x}{m}} = \frac{\left(m \operatorname{tg}\frac{x}{m}\right)}{1} - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\frac{\left(m \operatorname{tg}\frac{x}{m}\right)^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$+ \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)\left(1 - \frac{3}{m}\right)\left(1 - \frac{4}{m}\right)\frac{\left(m \operatorname{tg}\frac{x}{m}\right)^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

[1] Ces formules, à la vérité, n'auraient pas de sens si $\cos \frac{x}{m}$ était nul ; mais on va faire grandir m indéfiniment : quel que soit x, le nombre $\frac{x}{m}$ finit par de-

Les seconds membres, quand on y remplace $\frac{1}{m}$ par z et $m \operatorname{tg} \frac{x}{m}$ par u, deviennent respectivement

$$\Phi(z, u) = 1 - (1-z)\frac{u^2}{1.2} + (1-z)(1-2z)(1-3z)\frac{u^4}{1.2.3.4} - \dots,$$

$$\Psi(z, u) = \frac{u}{1} - (1-z)(1-2z)\frac{u^3}{1.2.3} + (1-z)(1-2z)(1-3z)(1-4z)\frac{u^5}{1.2.3.4.5} - \dots$$

si z représente l'inverse d'un nombre naturel, les développements ainsi obtenus sont essentiellement limités : mais rien n'empêche de regarder z comme étant quelconque, les développements qui figurent dans les seconds membres comme des séries contenant une infinité de termes qui suivent la même loi que les termes écrits, et $\Phi(z, u)$, $\Psi(z, u)$ comme les sommes de ces séries, pourvu qu'elles soient convergentes : en regardant z comme l'inverse d'un nombre naturel, ces séries se réduiront aux développements limités que l'on a particulièrement en vue. Or, il résulte du n° **189** que si l'on désigne par A, B, des nombres positifs quelconques satisfaisant à la condition $AB < 1$, les séries $\Phi(z, u)$, $\Psi(z, u)$ seront absolument et uniformément convergentes, et représenteront des fonctions continues des deux variables z, u dans l'ensemble (ZU) dont les éléments sont les couples de valeurs z, u qui vérifient les conditions $|z| \leqq B$, $|u| \leqq A$; si z tend vers o et u vers une limite x, les fonctions $\Phi(z, u)$, $\Psi(z, u)$ tendront respectivement vers des limites que l'on obtiendra simplement en remplaçant dans les séries z par o et u par x, et qui seront

$$\Phi(0, x) = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots,$$

$$\Psi(0, x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots ;$$

Or, quand m croît indéfiniment par valeurs naturelles, $z = \frac{1}{m}$ tend vers o et

$$u = \frac{\operatorname{tg} zx}{z} = \frac{\sin zx}{zx} \cdot \frac{x}{\cos zx},$$

venir très petit, et par conséquent $\cos \frac{x}{m}$ finit par être très voisin de 1, puisque $\cos x$ doit être une fonction continue de x et que l'on a $\cos 0 = 1$.

tend vers x puisque le premier facteur du dernier membre tend par hypothèse vers 1, et que le second facteur tend vers x en vertu de la continuité de la fonction $\cos x$, qui doit se réduire à 1 pour $x = 0$.

On doit donc avoir

$$\lim_{m=\infty} \frac{\cos x}{\cos^m \frac{x}{m}} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \cdots,$$

$$\lim_{m=\infty} \frac{\sin x}{\cos^m \frac{x}{m}} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \cdots;$$

Il est maintenant aisé de prouver que l'on a

$$\lim_{m=\infty} \left(\cos^m \frac{x}{m}\right) = 1.$$

En effet les relations (1) et (3) fournissent aisément la relation $\cos a = 1 - 2\sin^2 \frac{a}{2}$, d'où l'on déduit

$$\cos^m \frac{x}{m} = \left[1 - 2\sin^2 \frac{zx}{2}\right]^{\frac{1}{z}};$$

en remarquant que le rapport

$$-2\,\frac{\sin^2 \frac{zx}{2}}{z} = -\frac{\sin \frac{zx}{2}}{\frac{zx}{2}}\left(x \sin \frac{zx}{2}\right)$$

a pour limite 0 quand z tend vers 0, et en se reportant au théorème du n° **190**, le résultat annoncé ressort immédiatement.

Si donc il existe des fonctions continues $\cos x$, $\sin x$ vérifiant les équations fonctionnelles (1), (3) et satisfaisant à la condition

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

elles doivent être définies par les formules

$$(3)\qquad \begin{cases} \varphi(x) = 1 - \dfrac{x^2}{1.2} + \dfrac{x^4}{1.2.3.4} - \cdots, \\[2ex] \psi(x) = \dfrac{x}{1} - \dfrac{x^3}{1.2.3} + \dfrac{x^5}{1.2.3.4.5} - \cdots \end{cases}$$

et il ne reste plus qu'à montrer que les fonctions ainsi définies, satisfont effectivement à ces conditions.

On a d'abord

$$\frac{\psi(x)}{x} = \frac{1}{1} - \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

La série qui figure dans le second membre est absolument et uniformément convergente; elle est donc continue pour toute valeur de x, en particulier pour o, ce qui montre que le premier membre a pour limite l'unité quand x tend vers o. Notons en passant que cette proposition entraîne la suivante :

Si a, b sont des constantes quelconques, dont la seconde n'est pas nulle, on a

$$\lim_{x=0} \frac{\psi(ax)}{\psi(bx)} = \frac{a}{b},$$

en vertu de l'égalité

$$\frac{\psi(ax)}{\psi(bx)} = \frac{a}{b} \times \frac{\psi(ax)}{ax} \times \frac{bx}{\psi(bx)}.$$

L'application de la règle pour la multiplication des séries aux fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$, permet de vérifier sans peine les formules

$$(5) \quad \begin{cases} \varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y) - \psi(x)\psi(y), \\ \psi(x+y) = \psi(x)\varphi(y) + \psi(y)\varphi(x), \\ [\varphi(x)]^2 + [\psi(x)]^2 = 1. \end{cases}$$

Je ne m'arrêterai pas à développer ces calculs, d'autant qu'ils sont aisés et qu'on aura plus tard l'occasion de déduire ces formules de la définition de $\varphi(x)$ et de $\psi(x)$ par une autre voie. Je me bornerai à montrer comment on peut établir la périodicité des fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ en partant des formules (3) et (4). Il faut tout d'abord arriver à la notion du nombre π.

198. — La série qui définit $\psi(x)$ peut s'écrire :

$$\psi(x) = x\left[1 - \frac{x^2}{2.3}\right] + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}\left[1 - \frac{x^2}{6.7}\right] + \ldots$$
$$+ \frac{x^{4n+1}}{1.2\ldots(4n+1)}\left[1 - \frac{x^2}{(4n+2)(4n+3)}\right] + \ldots;$$

toutes les quantités entre crochets sont évidemment positives si l'on a $x^2 \leqq 6$ et *a fortiori* si l'on a $|x| \leqq 2$; ainsi $\psi(x)$ a une valeur toujours positive si x est compris entre o et 2 ; il en est de même de $\frac{\psi(x)}{x}$ si x est compris entre -2 et $+2$. D'un autre côté les formules (5) donnent sans peine l'égalité

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} = -\frac{\psi\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\,\psi\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

qui montre que le premier membre est toujours négatif si x et $x+h$ appartiennent à l'intervalle (o, 2) ; car alors $x+\frac{h}{2}$ appartient à ce même intervalle et $\frac{h}{2}$ est certainement compris entre -1 et $+1$; donc les deux facteurs qui figurent dans le second membre sont positifs : ainsi dans l'intervalle (o, 2) la fonction $\varphi(x)$ est décroissante ; mais cette fonction se réduit à la valeur positive $+1$ pour $x = 0$: en l'écrivant sous la forme

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}\left[1 - \frac{x^2}{7.8}\right] - \dots$$
$$- \frac{x^{4n-2}}{1.2\dots(4n-2)}\left[1 - \frac{x^2}{(4n-1)4n}\right] - \dots,$$

on voit que toutes les quantités entre crochets sont positives pour $x = 2$ et l'on constate que, pour la même valeur de x, la quantité $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ est négative : on en conclut $\varphi(2) < 0$. La fonction $\varphi(x)$, continue et décroissante dans l'intervalle (o, 2), positive pour $x = 0$, négative pour $x = 2$, admet donc une racine et une seule comprise dans cet intervalle ; désignons la par $\frac{\pi}{2}$. La formule

$$[\varphi(x)]^2 + [\psi(x)]^2 = 1$$

montre que l'on a

$$\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1,$$

et la supposition $\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ doit être exclue puisque la fonc-

tion $\psi(x)$ est positive entre o et 2. Les formules (3) donnent ensuite

$$\varphi\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\psi(x), \qquad \psi\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\varphi(x),$$

d'où

$$\varphi(x+\pi)=-\psi\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\varphi(x),$$
$$\psi(x+\pi)=\varphi\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\psi(x),$$
$$\varphi(x+2\pi)=\varphi(x), \quad \psi(x+2\pi)=\psi(x), \quad \text{etc}, \ldots.$$

D'ailleurs les séries mêmes qui définissent $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ montrent que $\varphi(x)$ est une fonction paire et $\psi(x)$ une fonction impaire, c'est-à-dire que l'on a

$$\varphi(-x)=\varphi(x), \quad \psi(-x)=-\psi(x);$$

par suite, les formules précédentes, par le changement de x en $-x$, donnent

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\psi(-x)=\psi(x),$$
$$\psi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\varphi(-x)=\varphi(x);$$

de même

$$\varphi(\pi-x)=-\varphi(x), \qquad \psi(\pi-x)=\psi(x),$$
$$\varphi(2\pi-x)=\varphi(x), \qquad \psi(2\pi-x)=-\psi(x).$$

De ces diverses formules, et de ce fait, établi plus haut, que la fonction $\varphi(x)$ décroît de 1 à o quand x croît de o à $\frac{\pi}{2}$, on déduit sans peine la façon dont varient les fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ou $\cos x$, $\sin x$, quand x varie dans un intervalle quelconque.

De la périodicité de ces fonctions, il est aisé de conclure qu'elles ne peuvent être des fonctions algébriques de x.

Cette périodicité montre aussi, lorsque x tend vers $+\infty$, ou vers $-\infty$, que ni $\cos x$, ni $\sin x$ ne peuvent tendre vers une limite.

Enfin les propositions établies aux nos **30** et **31** montrent que si le rapport $\frac{a}{2\pi}$ est irrationnel, on peut trouver des nombres entiers aussi grands qu'on le veut, m et n, tels que l'égalité $ma-2n\pi=b$

soit vérifiée avec l'approximation qu'on veut : il en sera de même des égalités $\cos ma = \cos b$, $\sin ma = \sin b$. Il en résulte, en particulier, que lorsque m croît indéfiniment par valeurs entières, ni $\cos ma$, ni $\sin ma$ ne peuvent avoir de limites lorsque a est incommensurable à π.

199. — De ce que $\cos x$ est une fonction continue et décroissante dans l'intervalle $(0, \pi)$ et qui varie de $+1$ à -1, il résulte que l'équation en y

$$(1) \qquad \varphi(y) = \cos y = x,$$

admet, lorsque x appartient à l'intervalle $(-1, 1)$, une racine et une seule appartenant à l'intervalle $(0, \pi)$; cette équation définit donc y comme une fonction continue et décroissante de x dans l'intervalle $(-1, 1)$; la valeur de cette fonction, qui sera désormais représentée par arc cos x (arc dont le cosinus est x), est toujours comprise entre 0 et π, bornes qui sont atteintes pour $x = 1$ et $x = -1$; toutes les solutions de l'équation (1) sont d'ailleurs données par la formule

$$y = 2n\pi \pm \operatorname{arc} \cos x,$$

n étant un nombre entier quelconque.

On verra de même que, x étant toujours supposé appartenir à l'intervalle $(-1, 1)$, l'équation en y

$$(2) \qquad \psi(y) = \sin y = x$$

admet une racine et une seule comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$. Cette équation définit y comme une fonction continue et croissante de x dans l'intervalle $(-1, 1)$; la valeur de cette fonction est toujours comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; ces bornes sont atteintes pour $x = -1$ et $x = +1$; on représentera cette fonction par arc sin x (arc dont le sinus est x) : toutes les solutions de l'équation (2) sont données par les formules

$$y = 2n\pi + \operatorname{arc} \sin x, \qquad y = (2n + 1)\pi - \operatorname{arc} \sin x,$$

n étant un nombre entier positif ou négatif.

On établira sans peine les formules

$$\text{arc sin}\,(-x) + \text{arc sin}\,x = 0, \qquad \text{arc cos}\,x + \text{arc cos}\,(-x) = \pi,$$

$$\text{arc sin}\,x + \text{arc cos}\,x = \frac{\pi}{2}.$$

Enfin la fonction $\text{tg}\,x$ se définit par la formule

$$\text{tg}\,x = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \frac{\sin x}{\cos x};$$

les variations de cette jonction se déduisent sans peine des variations de $\sin x$ et de $\cos x$; elle croît de $-\infty$ à $+\infty$ quand x croît de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$; elle est continue dans tout intervalle auquel n'appartient pas un nombre de la forme $(2n+1)\frac{\pi}{2}$, n étant un nombre entier positif ou négatif. L'équation en y

$$(3) \qquad \text{tg}\,y = x,$$

admet, quel que soit x, une racine et une seule comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$; cette équation définit y comme une fonction continue et croissante de x dans tout intervalle ; cette fonction, dont la valeur est toujours comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, se représente par $\text{arc tg}\,x$ (arc dont la tangente est x) ; toutes les solutions de l'équation (3) sont fournies par la formule

$$y = n\pi + \text{arc tg}\,x,$$

n étant un nombre entier positif ou négatif ; on a

$$\text{arc tg}\,(-x) + \text{arc tg}\,x = 0,$$

quel que soit x, et

$$\text{arc tg}\,x + \text{arc tg}\,\frac{1}{x} = \pm\frac{\pi}{2},$$

suivant que x est positif ou négatif.

Il n'y a maintenant aucune difficulté à établir les formules de la trigonométrie élémentaire, que je supposerai acquises désormais.

200. — La méthode employée au n° **196** va nous conduire à de

nouvelles et importantes expressions pour les fonctions trigonométriques [1].

On a vu au n° **196** que les quantités

$$\frac{\cos x}{\cos^n \frac{x}{n}}, \qquad \frac{\sin x}{\cos^n \frac{x}{n}}$$

sont des polynomes par rapport à la variable $z = \operatorname{tg} \frac{x}{n}$. Si, par exemple, n est impair, le premier polynome est de degré $n - 1$, le second de degré n : les racines du second sont les valeurs de z pour lesquelles $\sin x$ s'annule ; on les obtient en donnant à α, dans l'expression $\operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{n} = z_\alpha$, toutes les valeurs entières qui vont de $-\frac{n-1}{2}$ à $\frac{n-1}{2}$; en décomposant donc en facteurs le polynome considéré (n° **173**), on aura la relation

$$\frac{\sin x}{\cos^n \frac{x}{n}} = A \prod_{\alpha = -\frac{n-1}{2}}^{\alpha = \frac{n-1}{2}} (z - z_\alpha) = Az \prod_{\alpha = 1}^{\alpha = \frac{n-1}{2}} (z^2 - z_\alpha^2).$$

A est une constante dont on détermine immédiatement la valeur en divisant les deux membres par $z = \operatorname{tg} \frac{x}{n}$ et en faisant tendre x vers 0. On parvient ainsi à la relation

$$\frac{\sin x}{\cos^n \frac{x}{n}} = nz \prod_{\alpha = 1}^{\alpha = \frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{z^2}{z_\alpha^2}\right),$$

et l'on a démontré la seconde des deux formules qui suivent ; la première s'établit de la même façon ; dans les deux on suppose impair le nombre $n = 2m + 1$.

$$\frac{\cos x}{\cos^n \frac{x}{n}} = \prod_{\alpha = 1}^{\alpha = \frac{n-1}{2}} \left[1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{n}}{\operatorname{tg}^2 \frac{(2\alpha - 1)\pi}{2n}}\right], \qquad \frac{\sin x}{\cos^n \frac{x}{n}} = n \operatorname{tg} \frac{x}{n} \prod_{\alpha = 1}^{\alpha = \frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{n}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha\pi}{n}}\right).$$

[1] EULER. — *Introductio*, etc., § **178**.

Je regarderai dans ces formules x comme une constante, en excluant, pour un moment, le cas où x serait un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$, afin qu'il n'y ait pas de valeur de n pour laquelle $\cos \frac{x}{n}$ soit nul et les formules privées de signification.

On va maintenant supposer que n grandisse indéfiniment : les premiers membres tendront respectivement vers $\cos x$ et $\sin x$. Considérons la seconde formule par exemple, ou plutôt le produit de m facteurs,

$$\prod_{\alpha=1}^{\alpha=\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{n}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha\pi}{n}}\right).$$

Il est tout naturel de lui appliquer le théorème du n° **186**, analogue, pour les produits, à la proposition II du n° **183**. Le nombre r est égal à $m = \frac{n-1}{2}$, la quantité $v_\alpha(m)$ est

$$v_\alpha(m) = -\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{n}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha\pi}{n}}$$

dont la limite v_α, pour m ou n infini est

$$v_\alpha = -\frac{x^2}{\alpha^2\pi^2};$$

Enfin, la série $\sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \frac{x^2}{\alpha^2\pi^2}$ a ses termes positifs et est convergente.

Pour être sûr que le théorème s'applique, il suffit d'avoir une série convergente $\sum a_\alpha$ dont les termes soient des nombres positifs, tels que l'on ait

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{n}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha\pi}{n}} \leqq a_\alpha,$$

au moins à partir d'une certaine valeur de α ; on peut prendre

$$a_\alpha = \lambda \frac{x^2}{\alpha^2\pi^2},$$

en désignant par λ une constante que l'on détermine par la condition

$$\lambda \frac{x^2}{\alpha^2\pi^2} > \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{n}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha\pi}{n}}, \quad \text{ou} \quad \frac{\lambda \frac{x^2}{n^2}}{\frac{\alpha^2\pi^2}{n^2}} > \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{n}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha\pi}{n}}$$

cette condition sera certainement vérifiée si l'on a

$$\lambda \frac{x^2}{n^2} > \operatorname{tg}^2 \frac{x}{n}$$

puisque $\frac{\alpha\pi}{n}$ est un nombre positif, plus petit que $\frac{\pi}{2}$, et que l'on a par conséquent, $\operatorname{tg} \frac{\alpha\pi}{n} > \frac{\alpha\pi}{n}$ (1). Or, pourvu qu'on prenne $\lambda > 1$, l'inégalité finit par être vérifiée à partir d'une valeur $2M + 1$ de n, comme on le voit en l'écrivant sous la forme

$$\lambda > \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{n}}{\frac{x^2}{n^2}},$$

et en se rappelant que le second membre, quand n augmente indéfiniment, a une limite égale à 1.

L'existence de la série $\sum a_\alpha$ étant établie, il n'y a plus qu'à appliquer le théorème que l'on a rappelé tout à l'heure, et il est clair que l'on parvient ainsi à la relation

$$\lim_{n=\infty} \prod_{\alpha=1}^{\alpha=\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{n}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha\pi}{n}}\right) = \prod_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2\pi^2}\right);$$

en se reportant à la signification du premier membre, en changeant x en πx et en remplaçant α par n, on voit qu'on a établi la seconde des deux formules qui suivent ; la première s'établirait de la même façon :

$$\cos \pi x = \prod_{n=1}^{n=\infty} \left[1 - \frac{x^2}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2}\right], \quad \sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

(1) L'inégalité $\operatorname{tg} x > x$, pour x positif, plus petit que $\frac{\pi}{2}$ est bien connue du

A la vérité, si l'on se rappelle la restriction faite au début sur la valeur de x, on voit que la seconde formule n'est établie que lorsque x n'est pas un multiple impair de $\frac{1}{2}$; mais le dernier membre est, comme le premier, une fonction continue de x dans tout intervalle : si l'on fait tendre x vers une valeur exclue, les deux membres ne peuvent tendre que vers une même limite. La seconde égalité est établie dans tous les cas [1].

201. — En conservant les mêmes notations que dans le numéro précédent, on voit que le quotient $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$ de $\frac{\cos x}{\cos^n \frac{x}{n}}$ par $\frac{\sin x}{\cos^n \frac{x}{n}}$, est une fraction rationnelle en $z = \operatorname{tg} \frac{x}{n}$, dont le numérateur est de degré pair $n - 1$ et le dénominateur de degré impair n ; on connaît les racines z_α du dénominateur : en appliquant donc à la fraction rationnelle, la formule de décomposition en éléments simples (n° **174**), on voit que $\frac{\cos x}{\sin x}$ peut se mettre sous la forme

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \sum_{\alpha=-\frac{n-1}{2}}^{\alpha=\frac{n-1}{2}} \frac{A_\alpha}{z - z_\alpha},$$

A_α désignant une constante dont la valeur est évidemment la limite vers laquelle tend, lorsque z s'approche de z_α, le produit du second membre par $z - z_\alpha$ ou, ce qui revient au même, la limite de

$$\frac{\cos x}{\sin x}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{n} - \operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{n}\right) = \frac{\cos x}{\cos\frac{x}{n}\cos\frac{\alpha\pi}{n}} \times \frac{\sin\frac{x-\alpha\pi}{n}}{\sin x},$$

lorsque x s'approche de $\alpha\pi$. Dans ces conditions, le premier facteur du second membre tend vers $\frac{(-1)^\alpha}{\cos^2\frac{\alpha\pi}{n}}$; quant au second facteur,

lecteur. Il n'y a pas de difficulté à l'établir sur les séries qui définissent $\sin x$ et $\cos x$.

[1] Il est aisé d'en déduire la première en y changeant x en $x + \frac{1}{2}$.

en y faisant $x = \alpha\pi + h$ et en faisant tendre h vers o, on voit de suite qu'il tend vers $\frac{(-1)^\alpha}{n}$: on a donc $A_\alpha = \frac{1}{n\cos^2\frac{\alpha\pi}{n}}$, puis

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \sum_{\alpha=-\frac{n-1}{2}}^{\alpha=\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n\cos^2\frac{\alpha\pi}{n}} \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{n} - \operatorname{tg}\frac{\alpha\pi}{n}},$$

ou, en mettant à part la fraction qui correspond à la valeur $\alpha = 0$, et en réunissant les fractions qui correspondent à deux valeurs symétriques de α,

$$\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{n\operatorname{tg}\frac{x}{n}} - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\frac{n-1}{2}} \frac{2n\operatorname{tg}\frac{x}{n}}{\left(n\sin\frac{\alpha\pi}{n}\right)^2 - \cos^2\frac{\alpha\pi}{n}\left(n\operatorname{tg}\frac{x}{n}\right)^2}.$$

En posant $n = 2m + 1$, et

$$S(m) = \frac{\frac{1}{n\operatorname{tg}\frac{x}{n}} - \frac{\cos x}{\sin x}}{2n\operatorname{tg}\frac{x}{n}},$$

on peut encore écrire

$$S(m) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\left(n\sin\frac{\alpha\pi}{n}\right)^2 - \cos^2\frac{\alpha\pi}{n}\left(n\operatorname{tg}\frac{x}{n}\right)^2};$$

la première expression de $S(m)$, montre que la limite de cette quantité pour n ou m infini est $\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)$; quant à la seconde elle est préparée pour appliquer la proposition II du n° **183** ; le nombre r est ici égal à m, et l'on a

$$v_\alpha(m) = \frac{1}{\left(n\sin\frac{\alpha\pi}{n}\right)^2 - \cos^2\frac{\alpha\pi}{n}\left(n\operatorname{tg}\frac{x}{n}\right)^2};$$

$$v_\alpha = \lim_{m=\infty} v_\alpha(m) = \frac{1}{\alpha^2\pi^2 - x^2};$$

x doit, comme dans le numéro précédent, être regardé comme un nombre fixe.

On exclura les valeurs de x qui seraient des multiples de $\frac{\pi}{2}$ afin d'éviter, d'une part, les valeurs de n qui rendent $\operatorname{tg}\frac{x}{n}$ infinie, et, d'autre part, les termes infinis dans la série $\sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} v_\alpha$, laquelle, pour les valeurs de x autres que les multiples de π, est absolument convergente.

L'application de la proposition II du n° **183** conduira évidemment à la formule

$$S = \lim_{m=\infty}. S_m = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \frac{1}{\alpha^2\pi^2 - x^2};$$

cette application sera légitime dès que l'on aura prouvé l'existence d'une série convergente $\sum\limits_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} a_\alpha$ dont les termes soient des nombres positifs, tels que l'on ait, au moins à partir d'une certaine valeur de α, $|v_\alpha(m)| \leqq a_\alpha$.

Observons d'abord que, lorsque x est compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\sin x}{x}$ est plus grand que $1 - \frac{x^2}{6}$ et par suite que $\frac{1}{2}$; il en résulte que l'on a, quels que soient les nombres naturels n et $\alpha < \frac{n}{2}$,

$$\left(n \sin\frac{\alpha\pi}{n}\right)^2 - \cos^2\frac{\alpha\pi}{n}\left(n \operatorname{tg}\frac{x}{n}\right)^2 > \frac{\alpha^2\pi^2}{4} - \left(n \operatorname{tg}\frac{x}{n}\right)^2.$$

Puisque $n \operatorname{tg}\frac{x}{n}$ a pour limite x quand n augmente indéfiniment, il existe un nombre positif impair $2M + 1$ tel que l'on ait sous la condition $m \geqq M$,

$$\left(n \operatorname{tg}\frac{x}{n}\right)^2 < A^2,$$

en désignant par A un nombre supérieur à $|x|$. Si donc on ne considère que des valeurs de m supérieures à M, on aura

$$\left(n \sin\frac{\alpha\pi}{n}\right)^2 - \cos^2\frac{\alpha\pi}{n}\left(n \operatorname{tg}\frac{x}{n}\right)^2 > \frac{\alpha^2\pi^2}{4} - A^2,$$

le premier membre sera, *a fortiori*, plus grand que $\lambda\alpha^2\pi^2$, pourvu que l'on ait $\lambda < \frac{1}{4} - \frac{A^2}{\alpha^2\pi^2}$. Supposons qu'on ait déterminé un nombre naturel ζ_1 tel que le second membre de cette dernière inégalité soit positif, pour $\alpha = \zeta_1$, et qu'on choisisse λ inférieur à la valeur de ce second membre pour $\alpha = \zeta_1$, l'inégalité subsistera pour $\alpha > \zeta_1$. Dans ces conditions, en supposant $m > M$, $\alpha > \zeta_1$, on aura

$$\frac{1}{r_\alpha(m)} > \lambda\alpha^2\pi^2, \qquad 0 < r_\alpha(m) < \frac{1}{\lambda\alpha^2\pi^2}$$

et l'on pourra donc prendre $a_\alpha = \frac{1}{\lambda\alpha^2\pi^2}$. L'application de la proposition II du n° **183** est légitimée et il est par là même démontré que l'on a

$$\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right) = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} \frac{1}{\alpha^2\pi^2 - x^2};$$

c'est, sauf le changement de x en $x\pi$ et de α en n, la première des formules qui suivent : les autres s'obtiennent de même par la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles en z qui sont respectivement égales aux quantités $\frac{\sin x}{\cos x}$, $\frac{\cos^n \frac{x}{n}}{\sin x}$, et par l'application de la même proposition. Les seconds membres sont des séries absolument et uniformément convergentes dans tout intervalle qui ne contient pas une valeur de x qui rende un terme infini. Dans un tel intervalle la série qui figure au second membre est une fonction continue de x. Le fait que la première formule par exemple, subsiste pour les valeurs de x qui sont des multiples impairs de $\frac{1}{2}$, exclues dans la démonstration, résulte de la continuité.

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2},$$

$$\pi \operatorname{tg} \pi x = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2x}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - x^2},$$

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{(-1)^n 2x}{x^2 - n^2}.$$

Au reste les deux dernières formules se déduisent très simplement de la première, en se servant des relations

$$\operatorname{tg} \pi x = \cot \pi x - 2 \cot 2\pi x,$$

$$\frac{1}{\sin \pi x} = \cot \frac{\pi x}{2} - \cot \pi x \text{ [1]}.$$

202. — Les formules que l'on vient d'établir sont très précieuses parce qu'elles mettent en évidence des propriétés des fonctions $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ qui n'apparaissent pas, au moins de suite, sur les séries que l'on a prises comme définition.

Considérons, par exemple, la formule

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right);$$

tout d'abord elle met en évidence les valeurs de x pour lesquelles $\sin x$ s'annule ; elle permet aussi, pour une valeur donnée de x, de reconnaître le signe de $\sin \pi x$; si, en effet, on suppose x positif et si l'on désigne par p la partie entière de x, on pourra écrire

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{n=p} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \times \prod_{n=p+1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right);$$

tous les facteurs du produit infini sont positifs ; ce produit est lui-même positif ; les p facteurs qui figurent dans $\prod_{n=1}^{n=p} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$ sont négatifs ; on voit donc que $\sin \pi x$ est du signe de $(-1)^p$; en s'appuyant sur ce que la fonction $\sin \pi x$ est impaire, on voit aisément que ce résultat est vrai, quel que soit le signe de x, pourvu que p désigne la partie entière (positive, nulle ou négative) du nombre x.

[1] J'ai reproduit dans l'introduction des *Eléments de la Théorie des fonctions elliptiques* (t. I, p. 101), une autre démonstration, due à M. Darboux, des formules établies dans les deux derniers numéros, et même de formules plus générales. Cette démonstration est particulièrement adaptée au cas où la variable x est imaginaire.

La périodicité de la fonction $\sin \pi x$, qu'il a fallu quelque effort pour établir au n° **198**, s'aperçoit sans peine sur le produit infini, qui montre que $\sin \pi x$ est la limite, pour n infini, du produit

$$P_n(x) = \pi x\left(1 - \frac{x^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$$

$$= \pi x \frac{1 - x}{1} \cdot \frac{2 - x}{2} \cdots \frac{n - x}{n} \times \frac{1 + x}{1} \cdot \frac{2 + x}{2} \cdots \frac{n + x}{2};$$

en changeant dans cette formule x en $x + 1$, on trouve de suite

$$\frac{P_n(x + 1)}{P_n(x)} = -\frac{n + 1 + x}{n - x}.$$

La limite du second membre, pour n infini, est -1; on a donc

$$\sin \pi(x + 1) = -\sin \pi x$$

et, par conséquent,

$$\sin \pi(x + 2) = \sin \pi x :$$

Ainsi la fonction $\sin \pi x$ se reproduit quand on y remplace x par $x + 2$.

Des conclusions analogues s'obtiendraient évidemment sur le produit infini qui donne l'expression de $\cos \pi x$. Je me borne à remarquer, sur ce produit infini, qu'il met en évidence le sens de la variation de $\cos \pi x$ quand x croît de o à $\frac{1}{2}$; en effet, on voit de suite que, dans ces conditions, chaque facteur du produit infini est positif et décroît ; on en conclut aisément que le produit infini est lui-même positif et décroissant ; quand x croît de o à $\frac{1}{2}$, $\cos \pi x$ décroît de 1 à o. De la périodicité de $\cos \pi x$, et des formules

$$\cos \pi x = \cos \pi(-x), \qquad \cos \pi(1 - x) = -\cos \pi x,$$

qui résultent très aisément de la considération du produit infini, on déduit ensuite sans peine le sens de la variation de $\cos \pi x$, et par suite de $\sin \pi x$, dans n'importe quel intervalle.

Sur l'expression de $\sin \pi x$ on reconnaît aussi que la fonction $\frac{\sin \pi x}{\pi x}$, à laquelle on peut pour $x = 0$ attribuer la valeur 1, décroît quand x varie de o à 1.

Sans doute tous ces résultats sont bien familiers au lecteur; peut-être était-il cependant utile de lui montrer, sur un exemple simple, comment certaines propriétés des fonctions se groupent en quelque sorte autour de certaines expressions de ces fonctions. Les considérations si aisées que je viens d'indiquer à propos des fonctions circulaires s'appliquent d'ailleurs à des fonctions plus compliquées.

Je ferai encore, sur l'expression de $\cot \pi x$ comme somme d'une infinité de fractions rationnelles, une observation qu'il serait aisé de répéter, en faisant les changements convenables, sur les expressions de $\sin \pi x$, $\cos \pi x$, $\frac{1}{\sin \pi x}$, $\operatorname{tg} \pi x$, ... comme produits infinis ou sommes de fractions rationnelles.

En remplaçant $\frac{2x}{x^2 - n^2}$ par $\frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n}$, on voit qu'on peut écrire

$$\pi \cot \pi x = \lim_{n=\infty} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \ldots + \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n} \right]$$

$$= \lim_{n=\infty} \left[\sum_{p=-n}^{p=n} \frac{1}{x+p} \right].$$

$$= \frac{1}{x} + \lim_{n=\infty} \left[\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{x+p} + \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{x-p} \right];$$

mais les séries dont les p^{es} termes sont $\frac{1}{x-p}$, $\frac{1}{x+p}$ étant divergentes, il faut bien se garder d'écrire (n° **101**).

$$\pi \cot \pi x = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \frac{1}{x+p} = \frac{1}{x} + \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{x+p} + \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{1}{x-p};$$

j'aurai l'occasion de montrer plus tard comment ces formules, qui sont dénuées de sens, peuvent être remplacées par d'autres qui s'en rapprochent beaucoup, mais dont l'emploi est légitime, et comment l'expression

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{x+p} + \sum_{p=1}^{p=m} \frac{1}{x-p},$$

peut tendre vers telle limite qu'on veut quand n et m grandissent indéfiniment.

203. — J'appliquerai encore le théorème II du n° **126** à la démonstration de l'identité

$$\prod_{n=1}^{n=\infty}(1-q^{2n})\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+q^{2n-1}x)\prod_{n=1}^{n=\infty}(1+q^{2n-1}x^{-1})=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}q^{n^2}x^n,$$

où q désigne un nombre plus petit que 1 en valeur absolue et x un nombre quelconque, autre que 0. Les règles que l'on a données dans le chapitre III permettent de reconnaître immédiatement que les produits infinis et la série qui figurent dans les deux membres sont absolument convergents.

Soit, en désignant par r un nombre naturel quelconque,

$$\begin{aligned}f_n(x) = {} & (1+qx)(1+q^3x)\ldots(1+q^{2n-1}x)\\ & \times(1+qx^{-1})(1+q^3x^{-1})\ldots(1+q^{2n-1}x^{-1}).\end{aligned}$$

Il est clair que l'expression $f_n(x)$ peut se mettre sous la forme

$$f_n(x) = a_0 + a_1(x+x^{-1}) + a_2(x^2+x^{-2}) + \ldots + a_n(x^n+x^{-n}),$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des polynomes en q que je vais d'abord déterminer ; on aurait pu aussi bien écrire

$$f_n(x) = \sum_{\alpha=-n}^{\alpha=n} a_\alpha x^\alpha$$

en convenant de supposer $a_\alpha = a_{-\alpha}$. On a évidemment $a_n = q^{n^2}$.

En changeant x en q^2x dans la première expression de $f_n(x)$, on parvient de suite à la relation

$$(1)\qquad (qx + q^{2n})f_n(q^2x) = (1+q^{2n+1}x)f_n(x),$$

qui, en remplaçant $f_n(x)$, $f_n(q^2x)$ par leurs expressions ordonnées suivant les puissances de x et égalant dans les deux membres les coefficients de x^α, fournit une relation entre a_α et $a_{\alpha-1}$, à savoir

$$a_\alpha = a_{\alpha-1}q^{2\alpha-1}\frac{1-q^{2n-2\alpha+2}}{1-q^{2n+2\alpha}},$$

d'où l'on déduit

$$a_\alpha = a_0 q^{\alpha^2} \frac{(1 - q^{2n-2\alpha+2})(1 - q^{2n-2\alpha+4}) \dots (1 - q^{2n})}{(1 - q^{2n+2})(1 - q^{2n+4}) \dots (1 - q^{2n+2\alpha})},$$

et, en particulier pour $\alpha = n$, en se rappelant que a_n est égal à q^{n^2}

$$1 = a_0 q^{n^2} \frac{(1 - q^2)(1 - q^4) \dots (1 - q^{2n})}{(1 - q^{2n+2})(1 - q^{2n+4}) \dots (1 - q^{4n})},$$

et, par suite

$$a_\alpha = q^{\alpha^2} \frac{(1 - q^{2n+2\alpha+2})(1 - q^{2n+2\alpha+4}) \dots (1 - q^{4n})}{(1 - q^2)(1 - q^4) \dots (1 - q^{2n-2\alpha})}.$$

On reconnaît de suite que le second membre garde la même valeur quand on change α en $-\alpha$.

Regardons maintenant q et x comme des nombres donnés ; dans l'égalité

$$f_n(x) = a_0 + a_1 (x + x^{-1}) + a_2 (x^2 + x^{-2}) \dots + a_n (x^n + x^{-n}),$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n$ ont les valeurs que l'on déduit de l'expression de a_α en y faisant $\alpha = 0, 1, \dots, n$, faisons tendre n vers $+\infty$; dans l'expression

$$\frac{(1 - q^{2n+2\alpha+2})(1 - q^{2n+2\alpha+4}) \dots (1 - q^{4n})}{(1 - q^2)(1 - q^4) \dots (1 - q^{2n-2\alpha})},$$

le dénominateur a pour limite la valeur du produit convergent $\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - q^{2n})$, et la limite du numérateur est 1, à cause de la convergence du même produit ; on a donc

$$\lim_{n=\infty} \left[a_\alpha (x^\alpha + x^{-\alpha}) \right] = \frac{q^{\alpha^2} (x^\alpha + x^{-\alpha})}{\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - q^{2n})},$$

et l'on sera certain que la limite, pour n infini, de $f_n(x)$ est la somme de la série dont on vient d'écrire le terme de rang $\alpha + 1$, dès que l'on connaîtra une série convergente

$$A_0 + A_1 + \dots + A_\alpha + \dots$$

dont les termes soient des nombres positifs, tels que l'on ait, pour toutes les valeurs de n et de α,

$$|a_\alpha(x^\alpha + x^{-\alpha})| \leqq A_\alpha ;$$

en désignant par x' et q' les valeurs absolues de x et de q il suffira de prendre

$$A_\alpha = q'^{\alpha^2} \frac{\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + q'^{2n})}{\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - q'^{2n})} (x'^\alpha + x'^{-\alpha}).$$

Il est donc bien démontré que l'on a

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & f(x) \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 - q^{2n}) \\ & = 1 + q(x + x^{-1}) + q^4(x^2 + x^{-2}) + q^9(x^3 + x^{-3}) + \ldots = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{n^2} x^n, \end{aligned} \right.$$

en posant

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) & = \lim_{n=\infty} f_n(x) = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + q^{2n-1} x) \times \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + q^{2n-1} x^{-1}) \\ & = \prod_{n=1}^{n=\infty} [1 + q^{2n-1}(x + x^{-1}) + q^{4n-2}]. \end{aligned} \right.$$

Voici quelques propriétés de la fonction $f(x)$ [1], ou de la fonction $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q^{n^2} x^n$, qui n'en diffère que par un facteur indépendant de x :

[1] Cette fonction joue un rôle considérable dans la théorie des fonctions elliptiques ; et c'est dans cette théorie que la portée de la proposition précédente apparaît nettement : Voir, par exemple, le tome II des *Éléments* déja cités, qui est presque entièrement consacré à cette fonction, et qui est loin d'en contenir toutes les propriétés. La démonstration qu'on vient de lire, qui est due à M. BIEHLER, mais dont le principe appartient à Cauchy, s'y trouve page 10.

ces propriétés résultent immédiatement de l'analyse précédente.

La fonction $f(x)$, définie pour toute valeur de x autre que o, est continue dans tout intervalle qui ne contient pas o : elle ne change pas quand on change x en $\frac{1}{x}$.

On a

$$qxf(q^2x) = f(x),$$

comme il résulte de l'égalité (1) en faisant croître n indéfiniment.

La fonction $f(x)$ s'annule pour $x = -q^{2p-1}$ en désignant par p un nombre entier positif, nul ou négatif, et ne s'annule que pour ces valeurs de x.

CHAPITRE VI

DÉRIVÉES

I. — DÉFINITIONS. CALCUL DES DÉRIVÉES

204. — Lorsqu'on veut étudier la marche d'une fonction donnée $f(x)$, continue dans un intervalle (a, b), il est naturel de comparer les variations de la fonction aux variations de x, et de considérer les rapports tels que

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

où x_0, x_1 sont des valeurs de x qui appartiennent à l'intervalle considéré et où le dénominateur $x_1 - x_0$, le numérateur $f(x_1) - f(x_0)$, peuvent être regardés comme les accroissements respectifs de la variable x et de la fonction $f(x)$ quand on passe de la valeur x_0 à la valeur x_1. Un tel rapport est, en quelque sorte, l'accroissement moyen, ou, si l'on veut, le taux de l'accroissement, quand on passe de la valeur x_0 à la valeur x_1. Observons de suite que le polynome du premier degré en x

$$f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0),$$

qui prend pour $x = x_0$ et $x = x_1$ les mêmes valeurs que la fonction $f(x)$, est une fonction de x qui a le même accroissement moyen que la fonction $f(x)$.

Imaginons, en supposant $a < b$, qu'on ait partagé l'inter-

valle (a, b) en intervalles partiels, en intercalant entre a et b des nombres croissants et supposons, par exemple, qu'on ait

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

On peut, en intercalant entre a et b assez de nombres suffisamment rapprochés, faire en sorte que, dans chaque intervalle partiel, l'écart de la fonction $f(x)$ soit très petit (n° **162**) : si donc on considère une fonction $F(x)$, dont la valeur, lorsque x appartient à l'intervalle (x_i, x_{i+1}) $[i = 0, 1, 2, \dots n-1]$, soit égale à celle du polynome du premier degré en x

$$f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i),$$

cette fonction $F(x)$, qui est évidemment continue dans l'intervalle (a, b), et qui coïncide avec $f(x)$ pour les valeurs $x_0, x_1, \dots, x_n$ de x différera toujours très peu de $f(x)$; elle pourra être regardée comme une expression approchée de $f(x)$, pourvu que les intervalles partiels soient suffisamment petits.

Si l'on se place au point de vue géométrique qui a été expliqué au n° **172**, et si l'on convient de regarder comme une *courbe*, représentative de la fonction $f(x)$, l'ensemble des points du plan dont les coordonnées x, y vérifient l'équation $y = f(x)$, lorsque x varie de a à b, la substitution de la fonction $F(x)$ à la fonction $f(x)$ reviendra à substituer à cette courbe la ligne brisée dont les sommets successifs sont les points dont les coordonnées sont respectivement x_0, y_0 ; x_1, y_1 ; ... ; x_n, y_n, en posant

$$y_i = f(x_i) \qquad (i = 0, 1, 2, \dots n).$$

La ligne brisée s'écartera très peu de la courbe. On est ainsi amené à considérer lex expressions de la forme

$$\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i},$$

qui sont les coefficients angulaires des côtés de la ligne brisée, pour des valeurs x_i, x_{i+1} qui diffèrent très peu.

Plaçons-nous à un point de vue légèrement différent : soit $f(x)$ une fonction définie pour les valeurs de x voisines de x_0, ou, comme l'on dit, aux environs de x_0 ; j'entends par là qu'on

peut fixer un intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ dont x_0 soit le centre, et dans lequel la fonction $f(x)$ soit définie : il en sera évidemment ainsi toutes les fois que le point x_0 sera *intérieur* à un intervalle où la fonction $f(x)$ est définie. Si l'on désigne par h un nombre au plus égal en valeur absolue à α, en sorte que la fonction $f(x)$ soit définie pour $x_0 + h$, et si l'on regarde ce nombre h comme un accroissement donné à la valeur x_0 de la variable x, l'accroissement correspondant de la fonction $f(x)$ sera $f(x_0 + h)$, et le rapport

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

sera l'accroissement moyen de la fonction $f(x)$ quand on passe de x_0 à $x_0 + h$. La connaissance de ce rapport, pour les petites valeurs de h, renseigne sur l'allure de la fonction $f(x)$ au voisinage de x_0 ; si l'on savait, par exemple, qu'il est toujours positif, lorsque h est moindre en valeur absolue qu'un nombre positif fixe, on saurait que la fonction est croissante pour $x = x_0$ (n° **167**).

Le précédent rapport peut être considéré comme une fonction de la variable h, définie pour toutes les valeurs de h qui satisfont aux conditions $0 < | h | \leq \alpha$, ou, si l'on veut, pour toutes les valeurs de h, autres que o, qui appartiennent à l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$. Ces valeurs forment un ensemble $(\mathcal{H})$, dont le point o, qui ne lui appartient pas, est un point d'accumulation.

Supposons maintenant que la fonction $f(x)$ soit continue au point x_0 ; lorsque le dénominateur h du rapport tend vers o, il en est de même du numérateur $f(x_0 + h) - f(x_0)$, en vertu de la continuité ; si, dans ces conditions, le rapport tend vers une limite, si, en d'autres termes, il existe un nombre X_0, tel qu'on ait, au sens qu'on a expliqué au n° **151**,

$$\lim_{h=0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = X_0,$$

on dit que la fonction $f(x)$ admet une *dérivée* pour $x = x_0$ et la valeur de cette dérivée n'est autre que le nombre X_0.

En se reportant au n° **151** et à la signification attribuée au mot limite, on voit que cette définition peut être remplacée par la suivante.

Dire que la fonction $f(x)$ admet la dérivée X_0 pour $x = x_0$, c'est dire qu'à chaque nombre positif ε, si petit qu'il soit, correspond un nombre positif η tel que l'on ait, sous les conditions $0 < |h| < \eta$

$$\left|\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - X_0\right| < \varepsilon.$$

L'existence de la limite X_0 suppose évidemment la continuité de la fonction en x_0, puisque l'inégalité qui précède entraîne celle-ci

$$|f(x_0 + h) - f(x_0)| < |h| \times (|X_0| + \varepsilon),$$

qui montre bien clairement que la différence $f(x_0 + h) - f(x_0)$ peut être supposée aussi petite qu'on voudra, en valeur absolue, pourvu que h soit lui-même suffisamment petit, en valeur absolue. Lors donc qu'on sera assuré de l'existence de la limite X_0, on sera, par cela même, assuré de la continuité de la fonction.

Les égalités

$$\lim_{h=0} \frac{a^h - 1}{h} = \log a, \qquad \lim_{h=0} \frac{\sin h}{h} = 1,$$

dont la première suppose $a > 0$, peuvent être interprétées en disant que les fonctions a^x, $\sin x$, ont pour $x = 0$ des dérivées égales respectivement à $\log a$ et 1.

205. — Il convient maintenant de dire quelques mots du cas où, malgré la continuité de la fonction $f(x)$ pour $x = x_0$, la limite X_0 n'existerait pas.

On a dit plus haut que, si la fonction $f(x)$ était définie dans l'intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, la fonction de h

$$\varphi(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

était définie dans un ensemble $(\mathcal{H})$, qui n'est autre que l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$ d'où l'on aurait exclu le point 0, lequel est évidemment un point d'accumulation de l'ensemble $(\mathcal{H})$.

Soit ε un nombre positif, moindre que α et soit $\mathcal{E}(\varepsilon)$ l'ensemble des valeurs distinctes que prend la fonction $\varphi(h)$ quand on suppose

$0 < h < \varepsilon$. Si l'on suppose que la fonction $\varphi(h)$ soit bornée dans l'ensemble ($\mathcal{H}$), l'ensemble $\mathcal{E}(\varepsilon)$ est aussi borné ; on voit de suite que cet ensemble satisfait aux conditions du n° **156**, et qu'il existe un ensemble $\mathcal{E}(0)$ comprenant un nombre fini ou infini de points k dont chacun jouit de la propriété suivante : il y a des valeurs de h aussi petites qu'on le veut, en valeur absolue, et pour lesquelles le rapport $\frac{f(x_0+h)-f(x)}{h}$ est aussi voisin de k qu'on le veut.

Considérons, par exemple, la fonction $x \sin\frac{1}{x}$; elle n'est pas définie pour $x=0$: attribuons lui, pour $x=0$, la valeur 0 ; elle est alors définie pour toutes les valeurs de la variable et, comme il est aisé de le voir, continue pour chacune de ces valeurs, en particulier pour $x=0$. La fonction $\varphi(h)$, en prenant $x_0=0$, se réduit ici à $\sin\frac{1}{h}$; elle ne tend vers aucune limite quand h tend vers 0, et il est aisé de reconnaître que l'ensemble $\mathcal{E}(0)$ coïncide avec l'intervalle $(-1, +1)$.

Au lieu de considérer à la fois toutes les valeurs de h qui satisfont à la condition $0 < |h| \leqq \varepsilon$, on peut considérer à part les valeurs positives et les valeurs négatives qui vérifient cette condition, puis les deux ensembles $\mathcal{E}_1(\varepsilon)$, $\mathcal{E}_2(\varepsilon)$ dont l'une est l'ensemble des valeurs distinctes que prend $\varphi(h)$ pour les valeurs de h qui satisfont aux conditions $0 < h \leqq \varepsilon$, et le second l'ensemble des valeurs distinctes que prend $\varphi(h)$ pour les valeurs de h qui satisfont aux conditions $-\varepsilon \leqq h < 0$; ces deux ensembles, dont la réunion constitue $\mathcal{E}(\varepsilon)$, donnent naissance à des ensembles $\mathcal{E}_1(0)$, $\mathcal{E}_2(0)$; chacun des points k du premier, par exemple, jouit de la propriété suivante : il y a des valeurs positives de h, aussi petites qu'on le veut, pour lesquelles $\varphi(h)$ diffère de k aussi peu qu'on le veut. On donne quelquefois aux bornes supérieure et inférieure de l'ensemble $\mathcal{E}_1(0)$, qui font partie de cet ensemble (n° **156**) les noms de dérivées supérieure et inférieure à droite de la fonction $f(x)$, pour $x=x_0$; de même les bornes inférieure et supérieure de l'ensemble $\mathcal{E}_2(0)$ seront les dérivées inférieure et supérieure à gauche de la fonction $f(x)$ pour $x=x_0$. Ces quatre dérivées existent toujours pourvu que l'ensemble $\mathcal{E}(\varepsilon)$ soit borné pour une valeur suffisamment petite de ε. Il est presque inutile de

dire qu'elles se réduisent, comme les ensembles $\mathcal{E}(0)$, $\mathcal{E}_1(0)$, $\mathcal{E}_2(0)$, au seul nombre X_0, quand la dérivée, au vrai sens du mot, existe.

Dans la considération de l'ensemble $\mathcal{E}_1(\varepsilon)$, les valeurs de la fonction $\varphi(h)$ pour les valeurs négatives de h, ou de la fonction $f(x)$ pour les valeurs de x plus petites que x_0, n'interviennent pas : en sorte que, pour parler de cet ensemble, il n'est pas nécessaire de supposer que la fonction $f(x)$ soit définie dans tout l'intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, mais seulement dans l'intervalle $(x_0, x_0 + \alpha)$. On dit que la fonction $f(x)$ admet une dérivée *à droite*, pour $x = x_0$, quand l'ensemble $\mathcal{E}_1(0)$ se réduit à un seul point, ou ce qui revient au même, quand le rapport

$$\varphi(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

tend vers une limite lorsque h tend vers 0 par valeurs positives. De même, en supposant que la fonction $f(x)$ soit définie dans l'intervalle $(x_0 - \alpha, x_0)$, on dira qu'elle admet une dérivée à gauche, pour $x = x_0$, quand le précédent rapport tend vers une limite lorsque h tend vers 0 par valeurs négatives ; s'il en est ainsi l'ensemble $\mathcal{E}_2(0)$ se réduit à un seul point.

Enfin, quand l'ensemble $\mathcal{E}_1(\varepsilon)$ n'est pas borné en haut, par exemple, pour aucune valeur positive de ε, il peut bien exister encore un ensemble $\mathcal{E}_1(0)$ de points k dont chacun jouit de la propriété qu'on vient d'expliquer, mais on peut en outre affirmer qu'il y a des valeurs positives de ε aussi petites que l'on veut, pour lesquelles $\varphi(h)$ est aussi grand qu'on le veut : c'est ce qu'on exprime en disant que la dérivée supérieure à droite de la fonction $f(x)$, pour $x = x_0$, est égale à $+\infty$. Le cas où la dérivée inférieure à droite, ou à gauche, serait égale à $-\infty$ s'expliquerait de la même façon.

Enfin, je remarque que les notions précédentes peuvent s'appliquer à une fonction $f(x)$ définie, non plus dans un intervalle, mais dans un ensemble clos (X) : si x_0 est un point d'accumulation de cet ensemble, pour lequel la fonction $f(x)$ soit continue, la considération des valeurs que prend l'expression

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

pour les valeurs de x qui appartiennent à l'ensemble (X) et qui sont voisines de x_0, conduira, comme tout à l'heure, à la notion des dérivées supérieures ou inférieures, à droite et à gauche, de la fonction $f(x)$ au point x_0. Je n'aurai pas l'occasion d'utiliser cette dernière extension, et en parlant de la dérivée d'une fonction, il sera toujours sous-entendu qu'il s'agit d'une fonction déterminée dans un intervalle. Même dans ce cas, les notions des dérivées supérieures ou inférieures, à droite et à gauche, n'interviendront guère dans la suite du présent Livre ; je ne les ai données que pour mettre en lumière ce qu'a de restrictif la supposition de l'existence d'une dérivée ; sauf avis contraire, quand je parlerai d'une fonction $f(x)$ admettant une dérivée pour $x = x_0$, le mot dérivée sera entendu avec la signification du n° **204**, qui suppose d'une part l'existence des dérivées à droite et à gauche (sans autre épithète), c'est-à-dire l'existence de limites vers lesquelles tendent respectivement les rapports

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \qquad \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h}$$

quand h tend vers o par valeurs positives et, d'autre part, l'égalité de ces deux limites.

Toutefois ces dernières notions de dérivées à droite ou à gauche (sans autre épithète) interviendront naturellement quand x_0 est l'une ou l'autre des bornes de l'intervalle (a, b) où la fonction $f(x)$ est déterminée ; si a est la borne inférieure, quand on parlera de la dérivée en a, c'est la dérivée à droite que l'on entendra, puisqu'il ne doit pas être question des valeurs de x moindres que a ; de même, en parlant de la dérivée en b, c'est la dérivée à gauche que l'on entend, puisqu'il ne doit pas être question des valeurs de x supérieures à b.

206. — Considérons maintenant une fonction $f(x)$, continue dans l'intervalle (a, b) ; supposons qu'elle admette une dérivée pour chaque valeur de x appartenant à l'intervalle et autre que ses bornes : on est bien alors, pour une telle valeur, dans le cas du n° **204**, puisque la fonction $f(x)$ est continue pour cette valeur, et définie aux environs. On pourra dire alors que la fonction $f(x)$ admet une dérivée à l'intérieur de l'intervalle (a, b), et cette dérivée

sera une fonction de x, $f(x)$, définie pour toutes les valeurs de x qui vérifient les conditions $a < x < b$. Si x_0 est une telle valeur, le rapport

$$\varphi(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

est une fonction de h définie pour toutes les valeurs de h, autres que o, qui appartiennent à l'intervalle $(a - x_0, b - x_0)$; pour $h = 0$, attribuons-lui la valeur limite $f'(x_0)$; $\varphi(h)$ sera alors une fonction définie dans tout l'intervalle $(a - x_0, b - x_0)$; ce sera une fonction continue dans tout cet intervalle ; elle est en effet continue pour $h = 0$, d'après la convention qu'on vient d'adopter, elle est continue pour chacune des autres valeurs de h, puisqu'elle est le quotient de deux fonctions continues dont la seconde n'est pas nulle (nos **162**, **170**).

Si, en outre, les fonctions de h

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}, \qquad \frac{f(b - h) - f(b)}{h}$$

admettent des limites quand h tend vers o par valeurs positives ; si, pour employer le langage du numéro précédent, la fonction $f(x)$ admet une dérivée à droite en a, une dérivée à gauche en b, on dira que la fonction $f(x)$ admet une dérivée dans tout l'intervalle (a, b).

Si on appelle courbe l'ensemble des points du plan dont les coordonnées x, y vérifient l'équation $y = f(x)$, quand x varie de a à b, on dira alors que cette courbe admet une tangente en chacun de ces points, et le coefficient angulaire de la tangente sera précisément la valeur de la dérivée pour l'abscisse x_0 du point considéré. Il est manifestement la limite du coefficient angulaire de la droite qui joint le point d'abscisse x_0 au point d'abscisse $x_0 + h$ quand h tend vers o [1]. Toutefois, l'ensemble de points considéré ne mérite guère le nom de courbe que si l'on ajoute aux suppositions déjà faites, la supposition que la dérivée est une fonction continue dans l'intervalle (a, b), au moins en général.

Si la fonction $y = f(x)$, continue dans l'intervalle (a, b) admet

[1] Le lecteur interprétera de suite la signification géométrique de la dérivée à droite ou à gauche.

une dérivée dans cet intervalle, on a dit plus haut que cette dérivée était une fonction de x définie dans cet intervalle, c'est la *fonction dérivée* ; on la représente habituellement par l'un ou l'autre des symboles

$$f'(x), \quad \frac{df(x)}{dx}, \quad D_x f(x), \quad y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad D_x y.$$

Il peut se faire que la fonction $y = f'(x)$ soit continue dans l'intervalle (a, b) ou dans une partie de cet intervalle, et quelle y admette elle-même une dérivée ; on représentera celle-ci par

$$f''(x), \quad \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \quad D_x^2 f(x), \quad y'', \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad D_x^2 y.$$

Cette nouvelle fonction prend le nom de dérivée seconde de la fonction proposée $f(x)$; on arrivera de même à la notion des dérivées troisième, quatrième, ..., n^e, que l'on représentera par quelqu'un des symboles,

$$\begin{array}{llll} f'''(x), & f^{\text{IV}}(x), & \ldots, & f^{(n)}(x); \\ \frac{d^3f(x)}{dx^3}, & \frac{d^4f(x)}{dx^4}, & \ldots, & \frac{d^nf(x)}{dx^n}; \\ D_x^3 f(x), & D_x^4 f(x), & \ldots, & D_x^n f(x); \\ y''', & y^{\text{IV}}, & \ldots, & y^{(n)}, \\ \frac{d^3y}{dx^3}, & \frac{d^4y}{dx^4}, & \ldots, & \frac{d^ny}{dx^n}; \\ D_x^3 y, & D_x^4 y, & \ldots, & D_x^n y. \end{array}$$

La classe des fonctions qui admettent des dérivées n'est sans doute qu'une faible partie des fonctions continues ; c'est toutefois à cette classe de fonctions qu'il convient de s'attacher dans les éléments, en raison de leur simplicité. Ce n'est guère qu'à ces fonctions que j'aurai affaire. Toutefois, le cas où une fonction qui a, en général, une dérivée se trouve ne pas en avoir pour quelques valeurs particulières de la variable se rencontre assez fréquemment.

207. — On a défini au n° **173** le polynome dérivé d'un polynome $f(x)$ comme le coefficient de h dans le développement de $f(x+h)$ ordonné suivant les puissances de h ; il suffit de se rappeler qu'un polynome en h est une fonction continue de h pour re-

connaître que ce polynome dérivé du polynome $f(x)$ n'est autre que la dérivée du premier ordre de $f(x)$, au sens du n° **204**.

J'observe à ce propos que si l'on désigne par x', h' les valeurs absolues de x et de h ; on aura

$$\left| \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \right| \leq \frac{(x'+h')^n - x'^n}{h'} ;$$

on le voit de suite en supposant que les deux membres soient respectivement ordonnés suivant les puissances de h et de h', on voit de plus, sur la même forme, que l'on a

$$| nx^{n-1} | < \frac{(x'+h')^n - x'^n}{h'} .$$

208. — Considérons, comme au n° **184**, une série entière en x

$$a_0 + a_1 x + .., + a_n x^n + ...,$$

qui reste convergente quand on remplace tous les coefficients numériques $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ par leurs valeurs absolues $a_0, a', ..., a'_n, ...$ et la variable x par le nombre positif A ; cette série est absolument convergente pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à l'intervalle $(-A, A)$. et sa somme définit dans cet intervalle une fonction continue $f(x)$

Soit x_0 une valeur de x telle que l'on ait

$$x'_0 = | x_0 | < A$$

le rapport

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

sera défini pour toutes les valeurs de h, autres que o, qui satisfont à la condition $h' = | h | \leqq B$, en désignant par B le nombre positif $A - x'_0$; la valeur de ce rapport sera égale à la somme de la série convergente

$$(1) \qquad \varphi(h) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \frac{(x_0+h)^n - x_0^n}{h}$$

dont les termes sont inférieurs ou égaux aux termes correspon-

dants, tous positifs, de la série convergente

$$(2)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} a'_n \frac{(x'_0 + h')^n - x'^n_0}{h'}$$

et, *a fortiori*, inférieurs ou égaux aux termes, tous positifs, de la série également convergente

$$(3)\qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} a'_n \frac{A^n - x'^n_0}{h}.$$

Les relations d'inégalité entre les termes correspondants de ces séries, vraies pourvu que h ne soit pas nul et vérifie la condition $|h| \leqq B$, subsistent quand on attribue, pour $h = 0$, à la fonction de h

$$\frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h},$$

qui n'est pas définie pour $h = 0$, sa valeur limite nx_0^{n-1} ; mais cette fonction devient alors une fonction continue de h dans l'intervalle $(-B, B)$: La série (1) est, dans cet intervalle, uniformément convergente (n° **183**) ; sa somme est une fonction continue de h, dont la valeur pour $h = 0$ s'obtient simplement en remplaçant h par 0 dans chaque terme, c'est-à-dire en remplaçant $\frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h}$ par nx_0^{n-1} ; cette valeur est donc la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} na_n x_0^{n-1},$$

dont il est certain, par la démonstration même, qu'elle est absolument convergente, puisque ses termes sont moindres, en valeur absolue, que les termes correspondants de la série (3).

Ainsi la fonction $f(x)$ a une dérivée à l'intérieur de l'intervalle $(-A, A)$ et cette dérivée est la somme de la série absolument convergente

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots$$

dont les termes sont respectivement les dérivées des termes de la série $f(x)$. Si A' désigne un nombre positif, aussi voisin qu'on voudra de A, mais plus petit, la série $f'(x)$ reste convergente, d'après ce qu'on vient de dire, quand on remplace les coefficients numériques par leurs valeurs absolues et x par A' ; on peut donc raisonner sur cette série $f'(x)$ et sur l'intervalle $(-A', A')$ comme on a fait sur la série $f(x)$ et l'intervalle $(-A, A)$. La fonction $f'(x)$ a donc une dérivée, à l'intérieur de l'intervalle $(-A', A')$, et par conséquent à l'intérieur de l'intervalle $(-A, A)$, puisque A' diffère de A aussi peu qu'on le veut : cette dérivée est la somme de la série

$$f''(x) = 1.2\, a_2 + 2.3\, a_3 x + \ldots + (n-1)\, n a_n x^{n-2} + \ldots,$$

absolument convergente pourvu que l'on ait $x' < A$; il est clair que l'on peut continuer ainsi indéfiniment : la série

$$\begin{gathered} 1.2.\ldots p\, a_p + 2.3\ldots(p+1)\, a_{p+1} x + \ldots \\ + (n-p+1)(n-p+2)\ldots n a_n x^{n-p} + \ldots, \end{gathered}$$

est absolument convergente pour toute valeur de x intérieure à l'intervalle $(-A, A)$ et sa somme est la dérivée p^e, $f^{(p)}(x)$, de la fonction $f(x)$. A l'intérieur de cet intervalle, la fonction $f(x)$ a donc des dérivées de tous les ordres.

L'expression de la dérivée p^e montre que l'on a

$$a_p = \frac{1}{1.2\ldots p} f^{(p)}(0),$$

en sorte que la série proposée peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(0) + \ldots ;$$

c'est la généralisation manifeste d'une formule du n° **173**, relative aux polynomes.

Si, en particulier, la fonction $f(x)$ est une fonction entière (n° **184**), A peut être pris aussi grand qu'on le veut. Une fonction entière $f(x)$ admet, dans tout intervalle, des dérivées de tous les ordres qui se déduisent de la série qui définit cette fonction $f(x)$ par les règles qu'on vient d'expliquer.

209. — Tel est le cas pour les fonctions

$$e^x, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \text{sh}\, x, \quad \text{ch}\, x,$$

dont les dérivées, comme on le reconnaît immédiatement par l'application de la règle précédente, sont respectivement

$$e^x, \quad \cos x, \quad -\sin x, \quad \text{ch}\, x, \quad \text{sh}\, x.$$

La dérivée n^e de e^x est e^x ; celles de $\sin x$, $\cos x$ sont respectivement $\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ et $\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$, celles de $\text{sh}\, x$ et $\text{ch}\, x$ sont respectivement $\text{ch}\, x$ et $\text{sh}\, x$, ou $\text{sh}\, x$ et $\text{ch}\, x$, suivant que n est impair ou pair.

Les relations

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{h}\log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{h}{2x^2} + \frac{h^2}{3x^3} \cdots,$$

$$\frac{(x+h)^m - x^m}{h} = x^m \frac{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^m - 1}{h} = x^m \left[\frac{m}{1}\frac{1}{x} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{h}{x^2} + \ldots\right]$$

où dans la seconde m est un nombre quelconque, où l'on suppose dans toutes les deux, pour qu'elles soient valables, $x > 0$, $|h| < x$, montrent, puisque les derniers membres sont des fonctions continues de h, pour $h = 0$, que les dérivées respectives de $\log x$ et de x^m sont respectivement $\frac{1}{x}$ et mx^{m-1}.

210. — On a utilisé, pour ces divers exemples, les développements en série établis dans le chapitre précédent ; le lecteur trouvera dans les divers livres qui traitent de la matière d'autres procédés pour obtenir les dérivées des fonctions simples que l'on a considérées dans les derniers paragraphes ; il démontrera sans peine les propositions suivantes où u, v, w, . . désignent des fonctions de la variable x, en nombre fini, admettant, pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à un intervalle (a, b) des dérivées u', v', w', ...

Si A, B, C, ... désignent des constantes, la fonction de x

$$y = Au + Bv + Cw + \ldots$$

admettra, dans l'intervalle considéré, une dérivée et cette dérivée sera

$$y' = Au' + Bv' + Cw' + \dots.$$

La fonction

$$y = uv$$

admet, dans le même intervalle, une dérivée, et cette dérivée est

$$y' = u'v + uv'.$$

On peut encore écrire

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}.$$

Si l'on désigne sous le nom de dérivée logarithmique d'une fonction le rapport de la dérivée de cette fonction à la fonction elle-même, on peut donc dire que la dérivée logarithmique d'un produit de deux facteurs est égale à la somme des dérivées logarithmiques de ces facteurs ; cette proposition s'étend au cas de trois, quatre, ... facteurs : elle est générale.

Par exemple, si l'on suppose

$$y = uvw$$

on aura, en désignant par y' la dérivée de y

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w},$$

ou

$$y' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Si l'on suppose

$$y = u^m,$$

m étant un nombre entier positif, on aura

$$\frac{y'}{y} = m\frac{u'}{u},$$

ou

$$y' = mu^{m-1}u'.$$

La fonction

$$y = \frac{u}{v}$$

admet une dérivée pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à l'intervalle (a, b) et qui n'annulent pas v ; cette dérivée est

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

On déduit de là immédiatement que la dérivée logarithmique d'un rapport est égale à la différence entre la dérivée logarithmique du numérateur et la dérivée logarithmique du dénominateur.

En particulier si l'on suppose $y = u^{-m} = \frac{1}{u^m}$, m étant un nombre naturel, on aura

$$\frac{y'}{y} = -m\frac{u'}{u}, \qquad y' = (-m)\,u^{-m-1}u',$$

ce qui permet d'étendre aux exposants entiers négatifs une règle établie précédemment pour les exposants entiers et positifs.

Je signalerai encore les deux formules suivantes où m désigne un nombre naturel et où figurent les dérivées des fonctions u, v, jusqu'à l'ordre m dans la première, jusqu'à l'ordre $m+1$ dans la seconde. Il est à peine utile de dire qu'on suppose l'existence de ces dérivées. Les symboles D^m, D placés en tête du premier membre signifie la dérivée m^e, ou première, de la quantité placée entre parenthèses, ou entre crochets.

$$D^m(uv) = u^{(m)}v + \frac{m}{1}u^{(m-1)}v' + \frac{m(m-1)}{1.2}u^{(m-2)}v'' + \ldots + \frac{m}{1}u'v^{(m-1)} + uv^{(m)},$$

$$D\left[u^{(m)}v - u^{(m-1)}v' + u^{(m-2)}v'' - \ldots + (-1)^{m-1}u'v^{(m-1)} + (-1)^m uv^{(m)}\right]$$
$$= u^{(m+1)}v + (-1)^m uv^{(m+1)}.$$

La vérification de la seconde est immédiate. La première où, dans le second membre, les coefficients numériques suivent la même loi que dans le développement de la puissance m^e d'un binome, s'établit sans peine par induction.

211. — En appliquant la règle relative à un rapport, on trouve que la dérivée de

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

est

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x,$$

pour toutes les valeurs de x qui n'annulent pas $\cos x$.

De même, la dérivée de

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

est

$$-\frac{1}{\sin^2 x} = -\left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\right);$$

les dérivées de

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \qquad \frac{1}{\operatorname{th} x}$$

sont respectivement

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x, \qquad -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = 1 - \frac{1}{\operatorname{th}^2 x}.$$

On sait donc trouver les dérivées des fonctions entières ou rationnelles, des fonctions x^n, a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\log x$ et de celles qu'on déduit de ces fonctions par addition, multiplication, division, élévation aux puissances entières. J'établirai dans les deux numéros qui suivent deux théorèmes qui permettent d'obtenir les dérivées des fonctions obtenues par d'autres combinaisons de ces fonctions simples.

212. — Soit $u = f(x)$ une fonction de x admettant une dérivée u' dans l'intervalle (a, b) ; soient A et B les limites inférieure et supérieure de la fonction u dans cet intervalle ; regardons pour un instant u comme une variable indépendante et soit $\varphi(u)$ une fonction de cette variable admettant une dérivée $\varphi'(u)$; dans l'intervalle (A, B) ; il est clair qu'à chaque valeur de x appartenant à l'intervalle (a, b) correspond une valeur de u appartenant à l'intervalle (A, B) et par conséquent une valeur de $\varphi(u)$: en ce sens $\varphi(u)$ peut donc être regardé comme une fonction de x définie dans l'intervalle (a, b) ; je vais montrer qu'elle admet une dérivée égale à $\varphi'(u) \times u'$.

Considérons, en effet, une valeur particulière x_0 appartenant à l'intervalle (a, b); soit $u_0 = f(x_0)$ la valeur correspondante de la première fonction. Si l'on donne à x un accroissement h, la fonction u prendra un accroissement $k = f(x_0 + h) - f(x_0)$: il s'agit de montrer que, lorsque h tend vers zéro, le rapport

$$\frac{\varphi(u_0 + k) - \varphi(u_0)}{h}$$

tend vers une limite, et d'évaluer cette limite.

Supposons d'abord que, pour les valeurs de $|h|$ inférieures à un certain nombre positif η, k ne soit pas nul, sauf pour $h = 0$, le précédent rapport pourra s'écrire

$$\frac{\varphi(u_0 + k) - \varphi(u_0)}{k} \times \frac{k}{h}.$$

Si l'on fait tendre h vers o, k tend aussi vers o, à cause de la continuité de la fonction u, et le facteur

$$\frac{k}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

tend, par définition, vers la valeur u'_0 de la dérivée u' de la fonction $u = f(x)$, qui correspond à la valeur x_0 de la variable; le premier facteur

$$\frac{\varphi(u_0 + k) - \varphi(u_0)}{k},$$

a un sens pourvu que l'on ait $0 < |h| < \eta$; lorsque h tend vers o, il en est de même de k, et le rapport a pour limite la valeur $\varphi'(u_0)$ de la dérivée $\varphi'(u)$ pour $u = u_0$; la dérivée de la fonction $\varphi(u)$ de x, prise par rapport à x, est donc le produit de la dérivée de la fonction $\varphi(u)$, prise par rapport à u, par la dérivée de u, prise par rapport à x.

Cete proposition subsiste dans le cas exclu, le cas où, pour les valeurs de (h) inférieures à n'importe quel nombre positif, il y aurait toujours des valeurs nulles de k.

Soit alors, en désignant par η un nombre positif, (H) l'ensemble des valeurs de h pour lesquelles on a $0 < |h| < \eta$; soient (H') l'ensemble des valeurs de h qui vérifient ces inégalités et pour les-

quelles k est nul, et (H'') l'ensemble des valeurs de h qui vérifient ces inégalités et pour lesquelles k n'est pas nul, en sorte que l'on a (H) = (H') + (H''). Par hypothèse, o est un point d'accumulation de (H) et de (H'). On peut se borner à examiner le cas où o est aussi un point d'accumulation de (H''); si, en effet, il n'en était pas ainsi, les valeurs de h suffisamment voisines de o ne pourraient appartenir à (H''), elles appartiendraient donc à (H'); en d'autres termes k serait nul, pourvu que h fût suffisamment voisin de o; dans le voisinage de x_0, la fonction $u = f(x)$ serait constante; il en serait de même de la fonction $\varphi(u)$, regardée comme une fonction de x : le théorème serait évident. Supposons donc que o soit un point d'accumulation de (H''), ainsi que de (H'). Tout d'abord, il est clair que u'_0 est nul; en effet, quand h reste dans l'ensemble (H'), $k = f(x_0 + h) - f(x_0)$ est nul, on a donc

$$\lim_{h=0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0;$$

l'existence de la dérivée $f'(x)$ étant admise, il faut bien que $u' = f'(x_0)$ soit nul. Il suffit donc, pour établir la proposition énoncée, de montrer que l'on a

$$\lim_{h=0} \frac{\varphi(u_0 + k) - \varphi(u_0)}{h} = 0,$$

en supposant que h appartienne à (H). Or le raisonnement primitif, fondé sur l'égalité

$$\frac{\varphi(u_0 + k) - \varphi(u_0)}{h} = \frac{\varphi(u_0 + k) - \varphi(u_0)}{k} \times \frac{k}{h},$$

subsiste lorsque h appartient à (H''), et il en résulte qu'on peut faire correspondre à chaque nombre positif ε un nombre $\eta_1 < \eta$ tel que l'on ait

$$\left| \frac{\varphi(u_0 + k) - \varphi(u_0)}{h} \right| < \varepsilon_1,$$

sous la condition que h appartienne à (H'') et que l'on ait $|h| < \eta_1$ mais l'inégalité à démontrer subsiste d'elle-même, si h appartient à (H'), puisque, alors, k est nul : elle subsiste pourvu que l'on ait $0 < |h| < \eta_1$; et la proposition énoncée est établie.

Ce théorème s'étend sans difficulté; si, en conservant les notations précédentes on désigne par A_1, B_1 les limites inférieure et supérieure de la fonction $\varphi(u)$ dans l'intervalle (A, B) relatif à la variable u et que, en posant $v = \varphi(u)$, on considère une fonction $\psi(v)$ de la variable v admettant une dérivée $\psi'(v)$ dans l'intervalle (A_1, B_1) relatif à la variable v, on pourra regarder $\psi(v)$ comme une fonction de x; cette fonction admettra une dérivée dans l'intervalle (a, b) et cette dérivée sera

$$\psi'(v) \times \varphi'(u) \times u',$$

etc... Voici quelques applications :

La formule $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ montre que l'on peut regarder $\cos x$ comme le sinus de la variable $u = \frac{\pi}{2} - x$; la dérivée de $\cos x$ est donc égale à la dérivée de $\sin u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ par rapport à u, c'est-à-dire $\cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, multipliée par la dérivée de u, c'est-à-dire -1 ; la dérivée de $\cos x$ est donc $-\sin x$, on relie ainsi des résultats établis précédemment.

Si u désigne une fonction de x, admettant une dérivée u', les dérivées des fonctions a^u, $\log u$, u^m, considérées comme des fonctions de x, seront $a^u u' \log a$, $\frac{u'}{u}$, $mu^{m-1}u'$, puisque les dérivées de a^x, $\log x$, x^m sont $a^x \log a$, $\frac{1}{x}$, mx^{m-1}.

Relativement aux fonctions $\log u$, u^m, on doit supposer que, pour les valeurs de x appartenant à l'intervalle considéré, u reste positif ; toutefois cette restriction ne serait pas nécessaire pour u^m, si m était égal à une fraction irréductible à dénominateur impair ; en convenant de prendre

$$u^m = -(-u)^m$$

si u était négatif. Dans ce cas encore, la règle de dérivation serait la même.

213. — Soit $f(y)$ une fonction de la variable y admettant, dans l'intervalle (A, B), une dérivée $f'(y)$; considérons l'équation $f(y) = x$ et supposons qu'il y ait une fonction continue $\varphi(x)$, con-

tinue dans l'intervalle (a, b), dont les bornes inférieure et supérieure relatives à cet intervalle soient comprises entre A et B, telle enfin que, x étant une valeur quelconque appartenant à l'intervalle (a, b), la valeur de $f(y)$ soit égale à x lorsqu'on remplace y par $\varphi(x)$: une telle fonction existera certainement (n° **169**) si la fonction $f(y)$ est croissante dans l'intervalle (A, B) et si l'on prend $a = f(A)$, $b = f(B)$. Je vais montrer que la fonction $y = \varphi(x)$, dite *fonction inverse* de la fonction $f(y)$, admet une dérivée pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à l'intervalle (a, b) et qui n'annulent pas $f'(y)$: cette dérivée est

$$\varphi'(x) = \frac{1}{f'(y)}.$$

Considérons, en effet, une valeur de x appartenant à l'intervalle (a, b) et la valeur correspondante de y ; si l'on donne à x un accroissement h, la fonction $y = \varphi(x)$ prendra un accroissement $k = \varphi(x+h) - \varphi(x)$ et l'on aura $f(y) = x$, $f(y+k) = x+h$: ces deux égalités montrent d'abord que l'on ne peut avoir $k = 0$ sans que h soit nul ; on en tire d'ailleurs

$$\frac{f(y+k) - f(y)}{k} = \frac{h}{k}.$$

A cause de la continuité de la fonction $\varphi(x)$, k tend vers zéro en même temps que h ; dans ces conditions, le premier membre tend vers la limite $f'(y)$; si donc cette limite n'est pas nulle, le rapport

$$\frac{k}{h} = \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$$

aura pour limite $\frac{1}{f'(y)}$ lorsque h tendra vers zéro. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi le logarithme naturel y d'un nombre positif x peut être défini par l'équation $e^y = x$; la dérivée y' de $\log x$ est donc l'inverse de la dérivée de e^y par rapport à y et l'on a

$$y' = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Les fonctions u arc sin x, $v =$ arc cos x, $w =$ arc tg x ont

été définies au nº **199** ; elles vérifient respectivement les équations

$$\sin u = x, \quad \cos v = x, \quad \operatorname{tg} w = x,$$

on en conclut que leurs dérivées sont respectivement

$$u' = \frac{1}{\cos u} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v' = \frac{-1}{\sin v} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad w' = \frac{1}{1+x^2};$$

pour les deux premières, le radical doit être pris avec sa signification arithmétique, puisque les arcs u et v doivent être compris l'un entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, l'autre entre o et π ; en sorte que $\cos u$ et $\sin v$ sont certainement positifs.

214. — On peut évidemment combiner la règle qu'on vient d'établir avec celle qui concerne les fonctions de fonction.

Si, par exemple, une fonction continue $\varphi(u)$ vérifie l'équation $f(y) = u$, pour toutes les valeurs de u comprises entre a et b, et si u est une fonction $g(x)$ qui admette une dérivée dans l'intervalle (α, β), et qui reste, pour cet intervalle, comprise entre a et b, il est clair que la fonction $y = \varphi[g(x)]$, vérifiera l'équation $f(y) = g(x)$ pour les valeurs de x comprises entre α et β et admettra la dérivée $\frac{g'(x)}{f'(y)}$, pour celles de ces valeurs qui n'annuleront pas $f'(y)$.

Désignons, par exemple, par P et Q deux polynomes en x et considérons l'équation

$$\operatorname{tg} y = \frac{P}{Q}.$$

En conservant au symbole arc tg la signification adoptée au nº **199**, toutes les solutions de cette équation (en y) sont données par la formule

$$y = \operatorname{arc\,tg} \frac{P}{Q} + n\pi,$$

n étant un entier arbitraire ; mais il importe d'observer que la fonction $\operatorname{arc\,tg} \frac{P}{Q}$, évidemment continue pour les valeurs de x telles

que la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ soit continue, peut n'être pas continue pour les valeurs de x qui annulent Q :

Soit α une telle valeur, qui peut d'ailleurs annuler aussi le polynome P [1]; il y a lieu de distinguer divers cas : il peut se faire que, x s'approchant de α, la fraction $\frac{P}{Q}$ tende vers une limite, c'est ce qui arrivera lorsque α sera pour le polynome P une racine d'un ordre de multiplicité égal ou supérieur à l'ordre de multiplicité de cette même racine pour le polynome Q; rien n'empêchera d'attribuer à $\frac{P}{Q}$ cette valeur limite pour $x = \alpha$; dès lors, $\frac{P}{Q}$ et arc tg $\frac{P}{Q}$ seront des fonctions continues de x pour $x = \alpha$.

S'il en est autrement, c'est que, lorsque x s'approche de α, $\left|\frac{P}{Q}\right|$ augmente indéfiniment ; il peut arriver trois cas :

1° Lorsque x croît et traverse la valeur α, $\frac{P}{Q}$ conserve le même signe : on attribuera alors à arc tg $\frac{P}{Q}$, pour $x = \alpha$, la valeur $+\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, suivant que, pour les valeurs de x voisines de α, $\frac{P}{Q}$ est positif ou négatif ; arc tg $\frac{P}{Q}$ sera une fonction continue de x pour $x = \alpha$.

2° Lorsque x croît et traverse la valeur α, $\frac{P}{Q}$ passe de $-\infty$ à $+\infty$. Alors, pour les valeurs de x un peu plus petites que α, arc tg $\frac{P}{Q}$ est voisin de $-\frac{\pi}{2}$, et pour les valeurs de x un peu plus grandes, arc tg $\frac{P}{Q}$ est voisin de $+\frac{\pi}{2}$; afin que la fonction arc tg $\frac{P}{Q}$ soit toujours définie, convenons de lui attribuer la valeur $+\frac{\pi}{2}$, pour $x = \alpha$.

3° Dans les mêmes conditions $\frac{P}{Q}$ passe de $+\infty$ à $-\infty$; pour les valeurs de x un peu plus petites que α, arc tg $\frac{P}{Q}$ est voisin de

[1] On pourrait écarter cette supposition, en supprimant les facteurs communs à P, Q.

$+\frac{\pi}{2}$; pour les valeurs de x un peu plus grandes que α, $\operatorname{arc\,tg}\frac{P}{Q}$ est voisin de $-\frac{\pi}{2}$; convenons de lui attribuer cette valeur pour $x = \alpha$.

On pourra faire en sorte que l'expression

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{P}{Q} + n\pi$$

représente une fonction continue de x, pour toutes les valeurs de cette variable, en regardant n comme une fonction de x, qui n'admette d'ailleurs que des valeurs entières et satisfasse aux conditions suivantes : elle reste constante à l'intérieur de tout intervalle où la fonction $\operatorname{arc\,tg}\frac{P}{Q}$ est continue, en adoptant les conventions précédentes ; elle diminue brusquement d'une unité, ou augmente brusquement d'une unité, lorsque x croissant, la fonction $\operatorname{arc\,tg}\frac{P}{Q}$ augmente, ou diminue, de π ; en sorte que cette fonction n ne change que lorsque x traverse en croissant une valeur α qui fait passer $\frac{P}{Q}$ de $-\infty$ à $+\infty$, ou de $+\infty$ à $-\infty$: pour $x = \alpha$, la fonction n prend alors une valeur inférieure ou supérieure d'une unité à celle qu'elle avait pour x un peu plus petit que α, et garde, pour x un peu plus grand que α, la même valeur que pour $x = \alpha$. En d'autres termes encore, si l'on suppose $x_1 > x_2$ et si l'on désigne par n_1, n_2 les valeurs de n qui correspondent à x_1, x_2, la différence $n_2 - n_1$ s'obtient en considérant celles des racines α de l'équation $Q = 0$ qui vérifient les conditions $x_1 < \alpha \leqq x_2$, et en retranchant du nombre de ces racines pour lesquelles $\frac{P}{Q}$ passe de $+\infty$ à $-\infty$, le nombre de celles pour lesquelles $\frac{P}{Q}$ passe de $-\infty$ à $+\infty$. Si x_1 est une racine du polynome Q pour laquelle $\frac{P}{Q}$ ne change pas de signe, il n'y a pas lieu de s'en occuper.

Ces conventions, qui compensent la discontinuité de la fonction $\operatorname{arc\,tg}\frac{P}{Q}$, fixent entièrement la valeur de la fonction discontinue n, pourvu que l'on se donne la valeur n_0 de cette fonction pour une valeur x_0 de x. L'entier n_0 peut être choisi arbitrairement.

La fonction continue $\operatorname{arc\,tg}\frac{P}{Q}+n\pi$, ainsi définie, pourra, si l'on veut, être représentée par un symbole tel que $\operatorname{Arctg}\frac{P}{Q}$, c'est bien un arc dont la tangente est égale à $\frac{P}{Q}$, mais il est indispensable de le distinguer de la fonction $\operatorname{arc\,tg}\frac{P}{Q}$, toujours comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, et non définie pour les valeurs de x qui rendent infinie la fraction $\frac{P}{Q}$.

Par exemple, on pourra définir la fonction $\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{x}$, pour toutes les valeurs de x, en posant

$$\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{x}=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}+n\pi,$$

et en supposant $n=0$ pour x nul ou positif, et $n=1$ pour x négatif; pour $x=0$, $\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{0}$ doit d'après les conventions précédentes être pris égal à $\frac{\pi}{2}$. On a alors $\operatorname{Arc\,tg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}x$.

Pour une valeur de x qui n'annule pas Q, la dérivée de la fonction $\operatorname{Arc\,tg}\frac{P}{Q}$ est, d'après le numéro précédent, égale à $\frac{P'Q-PQ'}{P^2+Q^2}$, en désignant par P′ et Q′ les dérivées des polynomes P, Q. Que cette même formule subsiste pour les valeurs de x qui annulent Q, c'est ce que le lecteur n'aura pas de peine à démontrer. Si la valeur considérée de x annulait à la fois P et Q, on devra attribuer à $\frac{P'Q-PQ'}{P^2+Q^2}$ sa valeur limite.

Les détails dans lesquels je viens d'entrer me permettent de me borner au simple énoncé de la proposition que voici, qui est analogue à la précédente, mais dont la démonstration est plus facile en raison de la simplicité des résultats.

Si α est un nombre positif, il y a une fonction y de x qui vérifie, pour toutes les valeurs de x, l'équation

$$\operatorname{tg}y=\alpha\operatorname{tg}x,$$

qui est continue pour toutes les valeurs de x, et qui s'annule pour

$x = 0$; il n'y a d'ailleurs qu'une fonction qui satisfasse à ces conditions : sa valeur est égale à celle de x toutes les fois que x est un multiple entier de $\frac{\pi}{2}$; si x est compris entre deux multiples entiers consécutifs de $\frac{\pi}{2}$, la valeur de y est comprise entre les deux mêmes nombres. Cette règle, connaissant x, permet de calculer aisément y au moyen des tables trigonométriques. Je représenterai par $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} (\alpha \operatorname{tg} x)$ la fonction ainsi définie [1] : elle est égale à x quand α est égal à 1. Sa dérivée est

$$\frac{1}{\alpha \sin^2 x + \cos^2 x}.$$

II. — FORMULE DES ACCROISSEMENTS FINIS. FONCTIONS COMPOSÉES. FONCTIONS IMPLICITES

215. — L'importante proposition que je vais maintenant établir concerne une fonction $f(x)$, dont on sait qu'elle est nulle pour $x = a$ et pour $x = b$, qu'elle est continue dans l'intervalle (a, b) et qu'elle admet une dérivée $f'(x)$ à l'intérieur de cet intervalle ; elle s'appliquera évidemment si l'on sait que la fonction $f(x)$ admet une dérivée dans tout l'intervalle, y compris les bornes, puisqu'alors elle est certainement continue dans tout cet intervalle.

Dans ces conditions, on peut affirmer qu'il y a une valeur ξ de x, intérieure à l'intervalle (a, b), pour laquelle on a $f'(\xi) = 0$ [2].

(1) Elle est la somme de la série

$$x + \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}\frac{\sin 2x}{1} + \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}\right)^2 \frac{\sin 4x}{2} + \ldots + \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}\right)^p \frac{\sin 2px}{p} + \ldots$$

(2) Cette proposition est connue sous le nom de théorème de ROLLE. La démonstration qui suit est due, pour le fond, à O. BONNET. M. DARBOUX m'a fait remarquer, alors que je préparais la première édition du présent Livre, le rôle que jouait dans cette démonstration le fait qu'une fonction continue atteint sa borne supérieure. C'est M. ANDOYER, alors qu'il était élève à l'École normale, qui m'a fait remarquer que la démonstration de BONNET ne supposait pas l'existence de la dérivée aux bornes de l'intervalle.

En effet, ou bien la fonction $f(x)$ est nulle pour chacune des valeurs de x appartenant à l'intervalle (a, b), ou il existe de telles valeurs qui la rendent différente de zéro. Dans le premier cas, elle est constante, sa dérivée est nulle pour toute valeur de x appartenant à l'intervalle (a, b); dans le second cas, elle prend des valeurs positives ou des valeurs négatives ; si elle prend des valeurs positives, elle admettra, dans l'intervalle (a, b), une borne supérieure différente de zéro ; puisqu'elle est continue, elle atteindra cette borne supérieure pour une valeur ξ de x appartenant à l'intervalle (a, b) et nécessairement distincte de a et de b ; dès lors, si h désigne un nombre positif quelconque assez petit pour que les deux nombres $\xi + h$, $\xi - h$, appartiennent à l'intervalle (a, b), on aura

$$f(\xi + h) - f(\xi) \leqq 0, \qquad f(\xi - h) - f(\xi) \leqq 0,$$

et par suite

$$\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \leqq 0, \qquad \frac{f(\xi - h) - f(\xi)}{-h} \geqq 0.$$

Si l'on suppose que h tende vers 0, les deux rapports tendent par hypothèse vers la limite $f'(\xi)$; la première inégalité montre que cette limite est négative ou nulle, la seconde montre qu'elle est positive ou nulle : on a donc $f'(\xi) = 0$. S'il arrivait que $f(x)$ prît, dans l'intervalle (a, b) des valeurs négatives, on arriverait à la même conclusion en considérant la valeur de x qui fait acquérir à la fonction $f(x)$ sa valeur minimum dans l'intervalle (a, b).

Il convient de remarquer que cette démonstration ne suppose en aucune façon la continuité de la dérivée $f'(x)$; elle ne suppose même pas l'existence de cette dérivée pour $x = a$ et $x = b$, pourvu toutefois que la fonction soit continue dans l'intervalle (a, b) au sens du n° **163**.

Voici maintenant des conséquences importantes de cette proposition.

216. — Si la fonction $f(x)$ admet une dérivée $f'(x)$ dans l'intervalle (a, b), on a

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) ;$$

ξ étant un nombre compris entre a et b, différent de a et de b. Ce théorème s'appliquerait lors même que l'existence de la dérivée aux limites a, b ne serait pas assurée, pourvu que cette dérivée existât certainement pour toutes les autres valeurs de x appartenant à l'intervalle (a, b) et que la fonction fût continue dans cet intervalle.

Il suffit, pour s'en assurer, d'appliquer le théorème précédent à la différence entre $f(x)$ et la fonction, du premier degré en x,

$$f(a) + (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

qui, pour $x = a$ et $x = b$, prend les mêmes valeurs que $f(x)$: cette différence s'annule pour $x = a$ et $x = b$, elle admet, pour les valeurs de x comprises entre a et b, une dérivée égale à

$$f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a};$$

cette dérivée doit s'annuler pour une valeur ξ de x appartenant à l'intervalle (a, b), autre que a et b ; on a donc

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Si l'on désigne par x et $x + h$ deux nombres appartenant à l'intervalle (a, b), on pourra évidemment remplacer, dans le théorème qui vient d'être démontré, a et b par x et $x + h$; le rapport

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

est donc égal à la valeur que prend la dérivée $f'(x)$ pour une valeur de la variable comprise entre x et $x + h$: on peut représenter une telle valeur par $x + \theta h$, en désignant par θ un nombre compris entre 0 et 1, mais qui n'est ni 0 ni 1, on peut donc écrire

$$f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h)$$

et cette égalité suppose seulement la continuité de la fonction dans l'intervalle $(x, x + h)$ et l'existence de la dérivée à l'intérieur de cet intervalle.

Si les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ sont continues dans l'intervalle (a, b) et admettent des dérivées $f'(x)$, $\varphi'(x)$ à l'intérieur de cet intervalle, si, enfin, la dérivée $\varphi'(x)$ ne s'annule pour aucune valeur de x comprise entre a et b, on a

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$$

ξ étant une valeur comprise entre a et b et autre que a et b.

Il suffit d'appliquer le précédent raisonnement à la fonction de x

$$f(x)-f(a)-[\varphi(x)-\varphi(a)]\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)},$$

qui est nulle pour $x=a$ et $x=b$, et qui admet dans l'intervalle (a, b) la dérivée

$$f'(x)-\varphi'(x)\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}.$$

Cette dérivée doit s'annuler pour un nombre ξ compris entre a et b et, puisque la quantité $\varphi'(\xi)$ n'est pas nulle, on a

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

On peut remplacer cette égalité par la suivante, où les deux nombres x, $x+h$ sont supposés appartenir à l'intervalle (a, b) et où θ désigne un nombre compris entre 0 et 1, qui n'est ni 0 ni 1 :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)}=\frac{f'(x+\theta h)}{\varphi'(x+\theta h)}.$$

218. — Le théorème du n° **216** met bien en évidence la possibilité, pour une fonction $f(x)$ qui admet une dérivée bornée dans l'intervalle (a, b), de trouver un nombre positif η correspondant à un nombre positif donné ε, tel que l'écart de la fonction, dans tout intervalle compris à l'intérieur de (a, b) et d'étendue moindre que η, soit plus petit que ε ; en vertu de la formule

$$f(x+h)-f(x)=hf'(x+\theta h),$$

il suffit de prendre

$$\eta < \frac{\varepsilon}{M},$$

en désignant par M la borne supérieure de la fonction $|f'(x)|$ dans l'intervalle (a, b).

Le même théorème montre encore que, si la fonction $f(x)$ admet une dérivée $f'(x)$ dans l'intervalle (a, b) et si la dérivée $f'(x)$ est continue dans le même intervalle, le rapport

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

tend *uniformément* vers $f'(x)$ quand h tend vers o, c'est-à-dire qu'à chaque nombre positif ε correspond un nombre positif η tel que l'on ait

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)\right| < \varepsilon,$$

pourvu que $|h|$ soit inférieur à η et que x appartienne à l'intervalle (a, b), ainsi que $x + h$.

En effet, on a, en désignant par θ un nombre compris entre o et 1,

$$\frac{f(x+h-f(x)}{h} = f'(x+\theta h),$$

et, à cause de la continuité de la fonction $f'(x)$, il existe un nombre η tel que l'on ait

$$|f'(x+\theta h) - f'(x)| < \varepsilon,$$

pourvu que h soit inférieur à η en valeur absolue et que x et $x + h$ appartiennent à l'intervalle (a, b).

219. — Supposons que la fonction $z = f(x, y)$ des deux variables x et y soit déterminée dans l'ensemble (XY) des systèmes de nombres x, y qui vérifient les conditions $a \leqq x \leqq a', b \leqq y \leqq b'$; et que, si l'on attribue à y une valeur fixe appartenant à l'intervalle (b, b'), la fonction de x, $z = f(x, y)$, évidemment déterminée dans l'intervalle (a, a') y admette une dérivée ; celle-ci sera dite la dérivée partielle de la fonction $f(x, y)$ par rapport à

x et se représentera par l'un ou l'autre des symboles f'_x, $\frac{\partial f}{\partial x}$: on écrit quelquefois, plus explicitement $f'_x(x, y)$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$. De même si, x étant un nombre fixe appartenant à l'intervalle (a, a'), la fonction de y, $z = f(x, y)$, déterminée dans l'intervalle (b, b'), y admet une dérivée, celle-ci s'appellera la dérivée partielle par rapport à y de la fonction $f(x, y)$ et se représentera par f'_y ou $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Les suppositions faites sur la fonction $f(x, y)$ impliquent la continuité de cette fonction, soit par rapport à x, soit par rapport à y, mais séparément ; on n'a pas supposé, jusqu'ici la continuité de la fonction des deux variables x, y dans l'ensemble (XY), au sens du n° **165**.

Je me propose d'abord de montrer que les hypothèses que l'on a faites entraînent cette continuité au sens du n° **165**, si l'on y ajoute la supposition que les fonctions f'_x, f'_y sont bornées dans l'ensemble (XY) [1].

Posons en effet, pour la commodité de ce qui va suivre,

$$f'_x = \varphi(x, y), \quad f'_y = \psi(x, y).$$

Soit (x_0, y_0) un système de nombres appartenant à l'ensemble (XY). Soient enfin h, k des accroissements donnés à x_0, y_0 tels que le système $(x_0 + h, y_0 + k)$ appartienne comme (x_0, y_0) à l'ensemble (XY). Si l'on $a < x_0 < a'$, $b < y_0 < b'$, ce que l'on pourrait exprimer en disant que le système (x_0, y_0) est intérieur à l'ensemble (XY), il suffira, pour que le système $(x_0 + h, y_0 + k)$ appartienne à l'ensemble (XY), que h et k soient suffisamment petits en valeur absolue. Notons, en passant, que si les systèmes (x_0, y_0) et $(x_0 + h, y_0 + k)$ appartiennent tous deux à l'ensemble (XY), il en est certainement de même du système $(x_0 + \alpha h, y_0 + \beta k)$ pourvu que α, β soient des nombres qui appartiennent à l'intervalle (0,1).

Ceci posé on a évidemment

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = {} & f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) \\ & + f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) \end{aligned}$$

[1] On verra plus tard qu'il en est nécessairement ainsi si ces fonctions sont continues dans l'ensemble (XY) ; c'est l'extension aux fonctions de deux variables d'un théorème établi au n° **160** pour les fonctions d'une variable.

La quantité $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)$ peut être regardée comme l'accroissement de la fonction (de y) $f(x_0+h, y)$ quand on passe de la valeur y_0 de cette variable à la valeur y_0+k : on aura donc, par le premier théorème du n° **216**, appliqué à cette fonction d'une variable, qui, dans l'intervalle (b, b') admet la dérivée $\psi(x_0+h, y)$,

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) = k\,\psi(x_0+h, y_0+\beta k),$$

en désignant par β un nombre positif, plus petit que 1. De même, la quantité $f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)$ est l'accroissement de la fonction (de x) $f(x, y_0)$ quand on passe de la valeur x_0 à la valeur x_0+h ; on a donc, par le même théorème,

$$f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0) = h\,\varphi(x_0+\alpha h, y_0),$$

en désignant par α un nombre compris entre 0 et 1 : on en déduit

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = k\psi(x_0+h, y_0+\beta k) + h\varphi(x_0+\alpha h, y_0);$$

si, par conséquent, M est un nombre positif auquel les fonctions $\psi(x, y)$, $\varphi(x, y)$ restent inférieures en valeur absolue dans l'ensemble (XY), on aura

$$|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

si l'on a

$$|h| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |k| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

La continuité est donc assurée.

Les fonctions f'_x, f'_y ou $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, déterminées dans le même ensemble (XY) que la fonction $f(x, y)$, peuvent elles-mêmes donner naissance à des dérivées partielles prises par rapport à x et par rapport à y ; mon but est maintenant de démontrer que si les dérivées partielles ψ'_x et φ'_y existent et sont continues, (au sens du n° **165**)), elles sont égales.

Conservons les notations précédentes : on obtient le même résultat en retranchant l'expression $f(x+h, y) - f(x, y)$ de celle qu'on en déduit en y remplaçant y par $y+k$, ou en retranchant l'expression $f(x, y+k) - f(x, y)$ de celle qu'on en

déduit en y remplaçant x par $x + h$. L'expression

$$f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$$

regardée comme une fonction de y seul, déterminée dans l'intervalle (b, b') admet la dérivée $\psi(x_0 + h, y) - \psi(x_0, y)$. Si donc on applique le premier théorème du n° **216** à la fonction $f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$, on aura pour l'accroissement de cette fonction quand on passe de la valeur y_0 de la variable à la valeur $y_0 + k$.

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0)$$
$$= k[\psi(x_0 + h, y_0 + \beta k) - \psi(x_0, y_0 + \beta k)],$$

en désignant par β un nombre positif plus petit que 1. Mais en vertu du même théorème, appliqué maintenant à la différence des valeurs que prend la fonction de x, $\psi(x, y_0 + \beta k)$, quand on y remplace x par $x_0 + h$ et par x_0, le facteur qui multiplie k, dans le second membre, peut s'écrire $h\psi'_x(x_0 + \alpha h, y_0 + \beta k)$, en désignant par α un nombre compris entre o et 1 : l'expression $\psi'_x(x_0 + \alpha h, y_0 + \beta k)$ signifie valeur de la dérivée par rapport à x de la fonction $\psi(x, y)$, pour les valeurs respectives $x_0 + \alpha h$, $y_0 + \beta k$ de x, y : On a donc finalement

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0)$$
$$= hk\psi'_x(x_0 + \alpha h, y_0 + \beta k).$$

Mais si, au lieu de partir de l'expression $f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$ considérée comme une fonction de y, on était parti de l'expression $f(x, y_0 + k) - f(x, y_0)$ considérée comme une fonction de x, il est clair qu'on aurait mis le premier membre de l'égalité précédente sous la forme $hk\varphi'_y(x_0 + \alpha' h, y_0 + \beta' k)$ en désignant par α', β' des nombres compris entre o et 1 comme α et β : on en conclut l'égalité

$$\psi'_x(x_0 + \alpha h, y_0 + \beta k) = \varphi'_y(x_0 + \alpha' h, y_0 + \beta' k),$$

égalité qui subsiste quelque petits que soient les nombres h et k en valeur absolue ; elle subsistera certainement pour h et k nuls, c'est-à-dire qu'on aura

$$\psi'_x(x_0, y_0) = \varphi'_h(x_0, y_0)$$

si les deux fonctions ψ'_x φ'_y sont continues pour le système (x_0, y_0) au sens qui a été précisé à la fin du n° **165**. Si, en particulier, les deux fonctions ψ'_x et φ'_y sont continues dans tout l'ensemble (XY), elles sont identiques dans cet ensemble.

Cette circonstance se présentera en particulier, quelque soit l'ensemble (XY), si la fonction $f(x, y)$ est un polynome ; les dérivées f'_x f'_y de ce polynome sont des polynomes, ainsi que les dérivées ψ'_x et φ'_y : il n'y a aucune difficulté à former séparément ces deux polynomes, puis à constater leur identité.

Que l'égalité $\psi'_x = \varphi'_y$ puisse être en défaut quand les deux fonctions ψ'_x, φ'_y ne sont pas continues pour le système x_0, y_0, c'est ce que montre clairement [1] la fonction

$$f(x, y) = y^2 \text{ arc tg } \frac{x}{y} - x^2 \text{ arc tg } \frac{y}{x}.$$

Je supposerai, pour définir entièrement cette fonction, qu'une expression de la forme arc tg $\frac{a}{b}$ est nulle quand a et b sont nuls, qu'elle est égale à $+\frac{\pi}{2}$ ou à $-\frac{\pi}{2}$ quand b est nul, sans que a le soit, suivant que a est positif ou négatif. Si A est un nombre positif quelconque, il est clair alors que la fonction $f(x, y)$ sera définie dans l'ensemble (XY) dont les éléments sont des systèmes de deux nombres x, y qui vérifient les conditions $-A \leqq x \leqq A$, $-A \leqq y \leqq A$. Le lecteur reconnaîtra sans peine que cette fonction $f(x, y)$ admet les dérivées partielles du premier ordre

$$f'_x = \varphi(x, y) = y - 2x \text{ arc tg } \frac{y}{x}, \quad f'_y = \psi(x, y) = -x + 2y \text{ arc tg } \frac{x}{y}$$

qui sont définies dans le même ensemble ; ces formules conviennent encore quand les variables x ou y sont nulles : c'est ce dont le lecteur se convaincra aisément ; il en est de même des formules

$$\varphi'_y = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}, \qquad \psi'_x = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}$$

sauf dans le cas où l'on a à la fois $x = 0$, $y = 0$, cas où ces for-

[1] Schwarz. — *Ges. math. Abhandlungen*, II, p. 280.

mules n'ont pas de sens. Il est d'ailleurs impossible d'attribuer à la fraction $\frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2}$, pour $x = 0$, $y = 0$: une signification telle qu'elle soit continue pour ce système, car on peut faire tendre x et y vers 0 de façon que la fraction tende vers tel nombre qu'on veut, compris entre — 1 et + 1 ; quelle que soit la valeur qu'on lui attribue pour $x = 0$, $y = 0$, la fraction sera discontinue pour ce système.

Toutefois, la fonction $\varphi(x, y)$ a, quelque soit x, une dérivée par rapport à y ; pour $x = 0$, la fonction se réduit à y, dont la dérivée par rapport à y est 1 ; φ'_y, pour $x = 0$, $y = 0$, se réduit à 1 ; de même $\psi(x, y)$, quel que soit y, a une dérivée par rapport à x ; pour $y = 0$, $\psi(x, y)$ se réduit à $-x$, dont la dérivée par rapport à x est — 1 ; les deux dérivées φ'_y, ψ'_x ne sont pas égales pour $x = 0$, $y = 0$.

Revenons au cas général, pour expliquer les notations usuelles. Les dérivées partielles de f'_x par rapport à x, y se représentent les premières par

$$f''_{xx}, \qquad f''^{2}_{x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x},$$

la seconde par

$$f''_{xy}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y};$$

de même les dérivées partielles de f'_y par rapport à x, y se représentent, la première par

$$f''_{yx}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x},$$

la seconde par

$$f''_{yy}, \qquad f^2_{y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Avec ces notations, le théorème précédent revient à dire que, sous les conditions de continuité précisées plus haut, on a $f''_{xy} = f''_{yx}$: sous ces conditions l'ordre dans lequel on prend les dérivées est indifférent.

Les notations précédentes, et la proposition relative à l'interversion s'étendent sans aucune difficulté aux dérivées partielles d'ordre supérieur au second, d'une part, aux fonctions de plus de deux variables, de l'autre. Je crois d'autant moins utile d'insister ici sur

ces extensions que je n'en aurai guère besoin dans le présent ouvrage, où la considération des fonctions de deux variables n'est introduite qu'en vue de la théorie des fonctions d'une variable.

220. — Considérons une fonction $f(u, v)$ des deux variables u, v déterminée dans l'ensemble (UV) des systèmes de valeurs attribuées à u, v qui satisfont aux inégalités

$$A \leq u \leq A', \qquad B \leq v \leq B'.$$

Je suppose que cette fonction admette des dérivées partielles f'_u, f'_v bornées dans l'ensemble (UV); elle est alors bornée dans cet ensemble : Supposons maintenant que u et v soient des fonctions de la variable x, déterminées dans l'intervalle (a, b), admettant dans cet intervalle des dérivées u', v', et que les bornes respectives de ces fonctions u, v appartiennent respectivement aux intervalles (A, A'), (B, B'). Il est clair que la fonction $f(u, v)$, où l'on regarde u, v comme les fonctions de x que l'on vient de dire, est elle-même une fonction de x continue dans l'intervalle (a, b). Il est naturel de chercher si elle admet une dérivée par rapport à x.

Soient $x_0, x_0 + l$ des valeurs de x appartenant à l'intervalle (a, b), soient u_0 et $u_0 + h$, v_0 et $v_0 + k$, $f(u_0, v_0)$ et $f(u_0 + h, v_0 + k)$ les valeurs correspondantes des fonctions $u, v, f(u, v)$.

On aura, en attribuant encore à $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ le même sens qu'à f'_u, f'_v

$$\begin{aligned}
&f(u_0 + h, v_0 + k) - f(u_0, v_0)\\
&= f(u_0 + h, v_0 + k) - f(u_0 + h, v_0) + f(u_0 + h, v_0) - f(u_0, v_0)\\
&= k\psi(u_0 + h, v_0 + \beta k) + f(u_0 + h, v_0) - f(u_0, v_0)
\end{aligned}$$

en désignant par β un nombre positif plus petit que 1 ; on aura donc

$$\begin{aligned}
&\frac{f(u_0 + h, v_0 + k) - f(u_0, v_0)}{l}\\
&= \psi(u_0 + h, v_0 + \beta k)\frac{k}{l} + \frac{f(u_0 + h, v_0) - f(u_0, v_0)}{h}\frac{h}{l}.
\end{aligned}$$

Si l'on suppose maintenant que l tende vers 0, la limite du premier membre, si elle existe, sera la dérivée cherchée ; dans le

second membre $\frac{k}{l}$, et $\frac{h}{l}$ ont certainement pour limites les valeurs u'_0, v'_0 des fonctions u, v pour $x = x_0$; la quantité $\psi(u_0 + h, v_0 + \beta k)$ a pour limite $\psi(u_0, v_0)$, si la fonction $\psi(u,v)$ est continue pour le système (u_0, v_0), et la quantité

$$\frac{f(u_0 + h, v_0) - f(u_0, v_0)}{h}$$

a pour limite la valeur, pour $u = u_0$, de la dérivée, par rapport à u, de $f(u, v_0)$ considérée comme une fonction de u (¹).

Si donc on ajoute aux suppositions déjà faites la supposition que l'une au moins des dérivées partielles f'_u, f'_v est continue dans l'ensemble (UV), on peut affirmer que la fonction $f(u, v)$, regardée comme une fonction de x, admet une dérivée dans l'intervalle (a, b) et que cette dérivée est

$$f'_u u' + f'_v v'.$$

Considérons par exemple la fonction u^v, on pourra prendre pour A A′ deux nombres positifs quelconques et pour B et B′ deux nombres quelconques ; les dérivées partielles par rapport à u et à v seront respectivement vu^{v-1} et $u^v \log u$: il est aisé de voir qu'elles sont continues pour chaque système de valeurs appartenant à l'ensemble (UV) ; on en conclut que si u, v sont des fonctions de x définies dans l'intervalle (a, b), continues dans cet intervalle et y admettant des dérivées u', v', telles enfin que la première u soit toujours positive et par conséquent supérieure à un nombre positif A, la fonction de x, u^v, admettra pour dérivée dans l'intervalle (a, b),

$$u^{v-1}(vu' + uv' \log u).$$

Je n'insiste pas sur l'extension à des fonctions $f(u, v, w, \ldots)$ de trois, quatre, ... variables $u, v, w, \ldots$, que l'on considère comme des fonctions de x, du théorème précédent, lequel, ainsi que le

(¹) C'est pour mettre en évidence ce fait qu'on suppose seulement l'existence de cette dérivée, que je n'ai pas appliqué le théorème du n° **216** à l'expression $f(u_0 + h, v_0) - f(u_0, v_0)$. Quant à la petite difficulté tenant à ce que h pourrait être nul pour des valeurs de l aussi petites qu'on veut, on la lèvera comme au n° **212**.

lecteur n'a pas manqué de s'en apercevoir, constitue une extension du théorème du n° **212**.

221. — Soit $f(x, y)$ une fonction des deux variables x, y déterminée dans l'ensemble (XY) défini par les égalités

$$A < x < A', \quad B < y < B',$$

admettant des dérivées partielles f'_x, f'_y bornées dans l'ensemble (XY) et dont l'une au moins est continue dans cet ensemble (XY); on peut écrire, en désignant par (x, y), $(x+h, y+k)$ deux systèmes qui appartiennent à l'ensemble (XY), l'égalité

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + hf'_x(x+\theta h, y+\theta k) \\ + kf'_y(x+\theta h, y+\theta k),$$

où θ désigne un nombre positif plus petit que 1; $f'_x(x+\theta h, y+\theta k)$ et $f'_y(x+\theta h, y+\theta k)$ désignent les valeurs respectives des dérivées partielles f'_x, f'_y pour les valeurs $x+\theta h$, $y+\theta k$ des variables. Si l'on regarde en effet x, y, h, k comme des constantes, la dérivée (par rapport à t) de la fonction (de t) $f(x+ht, y+kt)$ sera, en vertu du théorème précédent,

$$hf'_x(x+ht, y+kt) + kf'_y(x+ht, y+kt),$$

et il suffit, pour obtenir l'égalité à démontrer, d'appliquer le théorème du n° **216** à l'accroissement de la fonction $f(x+ht, y+kt)$, quand on passe de la valeur 0 de la variable t à la valeur 1.

Si, en conservant la même signification à la fonction $f(x, y)$, on savait que l'équation $f(x, y) = 0$, pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à l'intervalle (a, a') contenu dans (A, A'), est vérifiée quand on y remplace y par une fonction continue de x, $y = \varphi(x)$, dont les valeurs appartiennent à l'intervalle (B, B'), et qui admette une dérivée $y' = \varphi'(x)$, le théorème du numéro précédent donnerait immédiatement l'expression

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$$

de la dérivée y' de $\varphi(x)$; en effet, quand on regarde y comme étant égal à $\varphi(x)$, la fonction $f(x, y)$ devient une fonction de x qui est nulle pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à l'inter-

valle (a, a') ; il doit donc en être de même de sa dérivée, et cette dérivée, d'après le numéro précédent, est $f'_x + y'f'_y$, d'où l'on déduit immédiatement la valeur de y', en supposant que f'_y soit différent de o.

Pour ce qui est de l'existence d'une fonction $y = \varphi(x)$ et de sa dérivée, la proposition qu'on va développer fournit un renseignement essentiel. Je supposerai toujours la fonction $f(x, y)$ déterminée dans l'ensemble (XY) qu'on a spécifié plus haut, je supposerai de plus qu'elle admet dans cet ensemble des dérivées partielles bornées et continues au sens du numéro 165 [1].

Le lecteur pourra se représenter, ainsi qu'on l'a expliqué au n° **172**, le système (x, y) comme un point dont les coordonnées sont x, y. L'ensemble (XY) sera alors l'ensemble des points situés à l'intérieur et sur le contour d'un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes : de là l'expression système *intérieur* à l'ensemble, dont je me servirai plus loin, pour désigner un système (x, y) dont les éléments vérifient les conditions $A < x < A'$, $B < y < B'$.

Ceci posé, supposons que, pour le système (x_0, y_0), intérieur à l'ensemble (XY), on ait $f(x_0, y_0) = 0$. La fonction $f(x_0, y_0)$ est déterminée aux environs du système (x_0, y_0). Supposons enfin que la dérivée partielle f'_y ne soit pas nulle pour $x = x_0$, $y = y_0$. Je vais montrer que, dans ces conditions, on peut regarder x_0 comme le centre d'un intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ dans lequel il existe une fonction continue $y = \varphi(x)$, qui annule l'expression $f(x, y)$ pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle considéré et qui se réduit à y_0 pour $x = x_0$. Cette fonction $\varphi(x)$, est entièrement déterminée par les conditions qui précèdent ; elle admet pour dérivée $-\frac{f'_x}{f'_y}$.

Tout d'abord, puisque le système (x_0, y_0) est intérieur à l'ensemble (XY), on peut fixer deux nombres positifs α, β tels que les systèmes de nombres x, y qui vérifient les conditions

$$|x - x_0| \leq \alpha, \qquad |y - y_0| \leq \beta,$$

systèmes dont je désignerai l'ensemble par $(XY)_0$, fassent partie

[1] On verra ultérieurement qu'elles sont certainement bornées si elles sont continues.

de l'ensemble (XY). Si l'on se place au point de vue géométrique, l'ensemble $(XY)_0$ est représenté par un rectangle contenu dans le rectangle qui représente l'ensemble (XY). Puisque la fonction f'_y est continue, on peut supposer α, β assez petits pour que la différence entre les valeurs que prend cette fonction pour un système quelconque appartenant à l'ensemble $(XY)_0$ diffèrent aussi peu que l'on veut de celle qu'elle prend pour $x = x_0$, $y = y_0$; puisque cette dernière valeur n'est pas nulle, on peut supposer que la fonction f'_y conserve le même signe dans tout l'ensemble $(XY)_0$, et reste, en valeur absolue, supérieure à un nombre positif P, convenablement choisi. D'autre part, la fonction f'_x, étant bornée, reste inférieure en valeur absolue à un certain nombre positif M; rien n'empêchant de remplacer par un nombre plus petit le nombre α que l'on a choisi tout d'abord, avec β, pour que les conditions précédentes soient vérifiées, je supposerai dans ce qui suit $\alpha < \frac{P}{M}\beta$. La fonction $y = \varphi(x)$, qui doit annuler $f(x, y)$, va être définie dans l'intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, et l'on prouvera qu'elle vérifie la condition $|y - y_0| < \beta$.

Pour définir la fonction $\varphi(x)$, je montrerai que l'équation (en y) $f(x, y) = 0$, où l'on regarde x comme un nombre fixe appartenant à l'intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, admet une racine et une seule, comprise entre $y_0 - \beta$ et $y_0 + \beta$: cette racine est la valeur qu'on attribuera à la fonction $\varphi(x)$, pour la valeur de x considérée. Tout d'abord, on reconnaît aisément que l'équation en y ne peut avoir plus d'une racine dans l'intervalle considéré; si en effet elle en admettait deux, y_1 et y_2, la dérivée partielle $f'_y(x, y)$, où, bien entendu, x a la valeur donnée, devrait d'après le théorème du n° **215** s'annuler pour une valeur intermédiaire à y_1, y_2, ce qui est contraire aux suppositions antérieures.

Ceci posé, si l'on fait $x = x_0 + h$, $y = y_0 + k$; en regardant toujours x, et par suite h, comme donnés, et en supposant que y appartienne à l'intervalle $(y_0 - \beta, y_0 + \beta)$, on aura, puisque $f(x_0, y_0)$ est nul

$$(1)\quad f(x_0 + h, y_0 + k) = hf'_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + kf'_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$
$$= hf'_y \times \left[\frac{k}{h} + \frac{f'_x}{f'_y}\right];$$

θ désigne un nombre compris entre o et 1 ; dans le dernier membre comme dans le second, les dérivées f'_x et f'_y doivent être remplacées par les valeurs que prennent ces fonctions pour $x = x_0 + \theta h$, $y = y_0 + \theta k$.

Puisque le système $(x_0 + \theta h, \; y_0 + \theta k)$ appartient à l'ensemble partiel $(XY)_0$, on a certainement

$$\left|\frac{f'_x}{f'_y}\right| < \frac{M}{P},$$

en sorte que le facteur $\frac{k}{h} + \frac{f'_x}{f'_y}$ est du signe de $\frac{k}{h}$, si l'on suppose

$$|k| > \frac{M}{P}|h|,$$

condition qui est compatible avec la supposition $|k| < \beta$, puisque l'on a supposé

$$\beta > \frac{M}{P}\alpha \geq \frac{M}{P}|h|.$$

Si donc on attribue à k deux valeurs de signes contraires k' et k'' satisfaisant l'une et l'autre aux conditions

$$\beta > |k| > \frac{M}{P}|h|$$

l'expression

$$hf'_y\left[\frac{k}{h} + \frac{f'_x}{f'_y}\right],$$

prendra deux valeurs de signes contraires, puisque hf'_y ne change pas de signe. D'ailleurs, si l'on regarde l'expression $f(x_0 + h, y_0 + k)$ comme une fonction de la variable k, cette fonction est manifestement continue dans l'intervalle (k', k'') ; elle s'annule donc pour une valeur k_1 comprise entre k' et k'' et, par suite, plus petite que β en valeur absolue : c'est $y_0 + k_1$ qui est la racine unique de l'équation (en y) $f(x, y) = 0$, comprise entre $y_0 - \beta$ et $y_0 + \beta$, dont on a affirmé plus haut l'existence.

Ce qui précède suppose évidemment que h ne soit pas nul ; pour $h = 0$, la seule valeur de k comprise entre $-\beta$ et $+\beta$ qui annule $f(x_0, y_0 + k)$ est $k = 0$.

Si maintenant, pour chaque valeur de $x = x_0 + h$, appartenant à l'intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, on attribue à y la valeur de cette racine unique que l'on vient de spécifier, il est clair qu'on aura défini, dans l'intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, une fonction $y = \varphi(x)$ qui, mise à la place de y dans la fonction $f(x, y)$, rendra cette fonction toujours nulle. La fonction $\varphi(x)$ se réduit à y_0 pour $x = x_0$. Elle est continue pour cette valeur ; en effet l'accroissement $k_1 = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)$ de cette fonction quand on passe de x_0 à $x_0 + h$ est inférieur à β en valeur absolue ; le nombre positif β n'est assujetti qu'à la condition $\beta > \frac{M}{p}\alpha$, et pourvu que cette condition reste vérifiée, rien n'empêche, dans les raisonnements précédents, de remplacer α et β par des nombres plus petits et même de les faire décroître indéfiniment : la continuité pour $x_1 = x_0$ est donc assurée.

Soit maintenant x_1 une valeur de x intérieure à l'intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, et soit $y_1 = \varphi(x_1)$. On peut raisonner sur x_1, y_1 comme on a fait sur x_0, y_0, déterminer deux nombres positifs α_1, β_1 assez petits pour que l'ensemble $(XY)_1$ des systèmes de nombres x, y qui vérifient les conditions $|x - x_1| \leq \alpha_1$, $|y - y_1| \leq \beta_1$ soit contenu dans l'ensemble $(XY)_0$. Au point de vue géométrique, l'ensemble $(XY)_1$ sera représenté par un rectangle intérieur au rectangle $(XY)_0$. Puis, on pourra définir dans l'intervalle $(x_1 - \alpha_1, x_1 + \alpha_1)$ une fonction $y = \varphi_1(x)$ qui annule $f(x, y)$, qui se réduit à y_1 pour $x = x_1$, qui est continue pour cette dernière valeur, qui enfin vérifie la condition $|y - y_1| < \beta_1$, et par conséquent la condition $|y - y_0| < \beta$, puisque l'ensemble $(XY)_1$ est contenu dans l'ensemble $(XY)_0$; mais, pour une valeur de x appartenant à l'intervalle $(x_1 - \alpha_1, x_1 + \alpha_1)$, et par conséquent à l'intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$, l'équation (en y), $f(x, y) = 0$ ne peut avoir deux racines distinctes $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ satisfaisant à la condition $|y - y_0| < \beta$; il faut donc que dans l'intervalle $(x_1 - \alpha_1, x_1 + \alpha_1)$, la fonction $\varphi_1(x)$ coïncide avec la fonction $\varphi(x)$; celle-ci est donc continue en x_1 et, par suite, pour toutes les valeurs de x intérieures à l'intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$. On peut dire aussi bien qu'elle est continue dans tout l'intervalle, y compris les bornes, quitte à remplacer α par un nombre un peu plus petit ; mais, en modifiant légèrement le raisonnement précédent,

on voit sans peine qu'il n'est nullement nécessaire de restreindre l'intervalle.

Il reste à montrer que la fonction $\varphi(x)$ est la seule fonction continue dans l'intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ qui annule $f(x, y)$ et se réduise à y_0 pour $x = x_0$. Observons que la fonction continue

$$\beta - | \varphi(x) - y_0 |$$

doit atteindre son minimum dans l'intervalle, et que, puisque cette fonction ne s'annule pas, il y a un nombre positif λ auquel elle reste supérieure ou égale. Supposons maintenant qu'il existe une autre fonction $\psi(x)$ satisfaisant aux conditions imposées à $\varphi(x)$; puisque, pour une valeur de x appartenant à l'intervalle considéré, l'équation (en y), $f(x, y) = 0$, ne peut avoir qu'une seule racine pour laquelle on ait $| y - y_0 | < \beta$, et que cette racine est $y = \varphi(x)$, il faudra que, pour une telle valeur de x, on ait soit $\psi(x) = \varphi(x)$, soit $| \psi(x) - y_0 | \geqq \beta$; dans ce dernier cas, on aurait

$$| \psi(x) - \varphi(x) | = | [\psi(x) - y_0] - [\varphi(x) - y_0] |$$
$$\geqq | \psi(x) - y_0 | - | \varphi(x) - y_0 | > \lambda.$$

La fonction $\psi(x) - \varphi(x)$ étant continue dans l'intervalle considéré, la proposition énoncée résulte évidemment du lemme suivant, que l'on aura plusieurs fois l'occasion d'appliquer.

Soit $g(x)$ une fonction dont on sait qu'elle est continue dans l'intervalle (c, d); que, pour chaque valeur de x appartenant à cet intervalle, elle est soit nulle, soit égale ou supérieure au nombre positif λ, en valeur absolue; enfin qu'elle est nulle pour une valeur x_0 de l'intervalle : on peut affirmer que la fonction $g(x)$ est nulle dans tout l'intervalle (c, d).

On peut en effet diviser cet intervalle en intervalles partiels assez petits pour que, dans chacun d'eux, l'écart de $g(x)$ soit moindre que λ; dans chaque intervalle partiel, la fonction $| g(x) |$ est, ou bien nulle, ou bien supérieure ou égale à λ; elle est nulle dans celui qui contient x_0, aux bornes de cet intervalle, dans les intervalles contigus, etc...

Enfin la fonction $\varphi(x)$ admet, pour $x = x_0$, une dérivée égale à

$$-\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)},$$

comme il résulte immédiatement de l'égalité (1) quand on suppose $f(x_0 + h, y_0 + k)$ nul ; on en tire en effet

$$\frac{k}{h} = -\frac{f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)}{f'_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)},$$

et la proposition est évidente, à cause de la continuité des dérivées partielles f'_x, f'_y.

Les raisonnements précédents montrent de suite que l'expression $-\frac{f'_x}{f'_y}$ donne les valeurs de la dérivée de $\varphi(x)$ pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à l'intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$.

A la vérité, la fonction $y = \varphi(x)$ n'a été définie que dans le petit intervalle $(x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$; mais il est clair qu'on peut la prolonger ; si l'on pose maintenant $x_1 = x_0 + \alpha, y_1 = \varphi(x_1)$, la dérivée partielle f'_y n'étant pas nulle pour $x = x_1$, $y = y_1$, on pourra définir dans les environs de x_1, une fonction continue $\varphi_1(x)$, annulant $f(x, y)$ et se réduisant à y_1 pour $x = x_1$; on voit comme précédemment que pour les valeurs de x un peu plus petites que x_1, $\varphi_1(x)$ coïncide avec $\varphi(x)$; pour les valeurs de x un peu plus grandes que x_1, on adoptera pour y la détermination $\varphi_1(x)$, en sorte qu'on aura déterminé, dans un intervalle plus étendu, une fonction continue, annulant $f(x, y)$, se réduisant à y_0 pour $x = x_0$, etc. Sans que je m'arrête davantage sur ce sujet, on conçoit qu'on puisse définir une fonction y de x, jouissant de ces mêmes propriétés dans un intervalle borné par deux nombres a, a' auxquels correspondent les valeurs b, b' de y et tels que les systèmes (a, b), ou (a', b'), tout en appartenant encore à l'ensemble (XY), ne soient plus *intérieurs* à cet ensemble, ou tels encore que la dérivée partielle f'_y s'annule pour l'un de ces systèmes ; toutefois ces cas limites demandent une étude particulière.

Laissant maintenant de côté les règles relatives au calcul, je vais montrer le parti qu'on peut tirer des dérivées pour l'étude des fonctions.

III. — ÉTUDE DES FONCTIONS AU MOYEN DES DÉRIVÉES

222. — Soit $f(x)$ une fonction admettant dans l'intervalle (a, b) une dérivée $f'(x)$, il résulte immédiatement de la définition de la dérivée que si la fonction $f(x)$ est constante dans l'intervalle (a, b), la dérivée $f'(x)$ est nulle pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à cet intervalle, que si, dans ce même intervalle, la fonction $f(x)$ est croissante, la dérivée $f'(x)$ n'est jamais négative, puisque le rapport

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

étant positif, sa limite, pour $h = 0$, ne peut être négative ; enfin que, si la fonction $f(x)$ est décroissante, la dérivée $f'(x)$ n'est jamais positive.

On est tenté de regarder comme évidentes les réciproques de ces théorèmes ; cela serait légitime s'il était vrai qu'un intervalle (a, b) pût toujours être décomposé en un nombre fini d'intervalles partiels tels que dans chacun d'eux la fonction $f(x)$ fût ou constante, ou croissante, ou décroissante ; c'est la fausseté, que l'on a mise hors de doute, de cette supposition, qui rend nécessaire la démonstration des théorèmes suivants.

1° Si la fonction $f(x)$ admet dans l'intervalle (a, b) une dérivée $f'(x)$ et si cette dérivée est constamment nulle, la fonction $f(x)$ est constante dans l'intervalle (a, b).

Soient en effet x_1, x_2 deux valeurs quelconques qui appartiennent à cet intervalle, on aura (n° **216**)

$$(1) \qquad f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi),$$

en désignant par ξ un nombre compris entre x_2 et x_1 ; mais, par hypothèse, $f'(\xi)$ est nul ; on a donc $f(x_2) = f(x_1)$.

La fonction $f(x)$ conserve toujours la même valeur dans l'intervalle (a, b) ; cette valeur est nécessairement $f(a) = f(b)$.

2° Si la fonction $f(x)$ admet dans l'intervalle (a, b) une dérivée $f(x)$, si, dans cet intervalle, cette dérivée n'est jamais négative, si enfin elle n'est pas nulle pour toutes les valeurs de x qui appar-

tiennent à un intervalle (a', b') contenu dans l'intervalle (a, b), la fonction $f(x)$ est croissante dans l'intervalle (a, b).

Soient encore x_1, x_2 deux valeurs quelconques appartenant à l'intervalle (a, b) et soit $x_1 < x_2$; l'égalité (1) montre, puisque la quantité $f'(\xi)$ est positive ou nulle, que l'on a $f(x_1) \leq f(x_2)$. Mais, dans l'intervalle (x_1, x_2) la fonction $f(x)$ ne peut être constante, puisque la fonction $f'(x)$ n'est pas constamment nulle dans cet intervalle ; il existe donc un nombre x' compris entre x_1 et x_2 tel que la valeur de $f(x')$ diffère au moins de l'une des quantités $f(x_1)$, $f(x_2)$; les quantités x_1, x', x_2 étant d'ailleurs rangées par ordre de grandeur, on a $f(x_1) \leq f(x') \leq f(x_2)$; comme les deux égalités ne peuvent avoir lieu simultanément, il faut que l'on ait $f(x_1) < f(x_2)$. C'est ce qu'il fallait établir ; on prouvera de la même façon le théorème suivant.

3° Si, dans l'intervalle (a, b), la fonction $f(x)$ admet une dérivée $f'(x)$ qui ne soit jamais positive, si cette dérivée n'est pas nulle pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à un intervalle (a', b') compris dans l'intervalle (a, b), la fonction $f(x)$ est décroissante dans ce dernier intervalle.

223. — Si une fonction $f(x)$ est définie dans l'intervalle (a, b), on dit qu'elle admet un maximum pour la valeur ξ attribuée à x, valeur appartenant à l'intervalle (a, b), mais distincte des limites a, b, s'il existe un nombre positif ε tel que l'on ait, pour toutes les valeurs de h autres que o et inférieures à ε en valeur absolue,

$$f(\xi + h) - f(\xi) < 0 ;$$

si, dans les mêmes conditions, on avait

$$f(\xi + h) - f(\xi) > 0,$$

on dirait que la fonction $f(x)$ admet un minimum pour $x = \xi$.

Si la fonction $f(x)$ admet un maximum ou un minimum pour $x = \xi$, et si pour cette même valeur elle a une dérivée, cette dérivée est nulle ; cela résulte du raisonnement employé au n° **215** : pour h positif et suffisamment petit les deux rapports

$$\frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}, \quad \frac{f(\xi - h) - f(\xi)}{-h}$$

finissent par être certainement de signes contraires ; leur limite commune, pour $h = 0$, est donc nulle.

Si donc la fonction $f(x)$ admet une dérivée dans l'intervalle (a, b), on devra chercher les valeurs de x qui lui font acquérir un maximum ou un minimum parmi celles qui annulent la dérivée ; mais le choix et la distinction de ces valeurs exigent une étude plus approfondie.

224. — Le cas le plus simple est celui où, la fonction $f(x)$ étant continue dans l'intervalle (a, b), cet intervalle peut être partagé en un nombre fini d'intervalles partiels tels que dans chacun d'eux la fonction varie toujours dans le même sens ; si, par exemple, la fonction est croissante dans un intervalle et décroissante dans l'intervalle suivant, il est clair qu'elle présentera un maximum pour la limite commune aux deux intervalles ; on dit que, pour cette valeur, elle cesse de croître pour décroître ensuite ; de même, si la fonction est décroissante dans un intervalle et croissante dans l'intervalle suivant, elle passe par un minimum pour la valeur de la variable égale à la borne commune des deux intervalles.

On est certain d'être dans ce cas si, dans l'intervalle (a, b), la fonction $f(x)$ admet une dérivée et si l'intervalle (a, b) peut être divisé en un nombre fini d'intervalles partiels, tels que dans chacun d'eux la dérivée $f'(x)$ ait un signe déterminé ; si dans un intervalle partiel la dérivée est positive, la fonction est croissante, etc. Peu importe d'ailleurs que dans un intervalle partiel la dérivée s'annule, pourvu qu'elle ne change pas de signe et qu'elle ne soit pas nulle pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à un intervalle fini.

Les valeurs qui fournissent les maxima sont alors caractérisées par ce fait que la dérivée y est nulle, qu'elle est positive pour les valeurs plus petites, négative pour les valeurs plus grandes ; de même pour les valeurs qui fournissent les minima, la dérivée est nulle et passe du négatif au positif.

Par exemple l'expression $4x^3 - 3x^4 - m$, où m est une constante, admet une dérivée dans tout intervalle ; cette dérivée est $12x^2(1 - x)$; elle est positive pour toutes les valeurs de x inférieures à 1, négative, pour toutes les valeurs de x supérieures à 1 ;

la fonction proposée est donc croissante dans l'intervalle $(-\infty, 1)$, en désignant par ce symbole un intervalle dont la limite inférieure est un nombre négatif aussi grand qu'on le veut en valeur absolue; elle est décroissante dans l'intervalle $(1, +\infty)$, elle passe par un maximum pour $x = 1$, ce maximum est $1 - m$; d'ailleurs pour $x = -\infty$, la fonction est égale à $-\infty$; en résumé, quand x croît de $-\infty$ à 1, la fonction croît de $-\infty$ à $1 - m$, et quand x croît de 1 à $+\infty$, la fonction décroît de $1 - m$ à $-\infty$; on conclut de là que, si $1 - m$ est positif, la fonction $4x^3 - 3x^4 - m$ s'annule pour une valeur de x inférieure à 1 et pour une valeur de x supérieure à 1, et seulement pour ces valeurs; que, si l'on a $m = 1$, la fonction s'annule pour $x = 1$ et seulement pour cette valeur; enfin que, si $1 - m$ est négatif, la fonction ne s'annule pour aucune valeur de x.

225. — Il peut se faire que, dans l'intervalle où on la considère, la fonction $f(x)$, que je suppose toujours continue, admette une dérivée, sauf pour quelques valeurs exceptionnelles; une telle valeur x' sépare alors deux intervalles partiels (x_1, x'), (x', x_2) tels que la dérivée existe pour tous les nombres qui appartiennent à l'un ou à l'autre des deux intervalles, sauf toutefois pour le nombre x'; si la dérivée a le même signe pour toutes les valeurs de la variable qui appartiennent au premier intervalle, si, par exemple, la dérivée est positive pour les valeurs de x comprises entre x_1 et x', on peut affirmer que la fonction $f(x)$ est croissante dans l'intervalle (x_1, x'), sans exclure les limites de cet intervalle; en effet le théorème du n° **216** subsiste alors, ainsi qu'on en a fait l'observation; il en est de même de ses conséquences. Si, de même, la dérivée est négative dans l'intervalle (x', x_2), la fonction sera décroissante dans cet intervalle et présentera un maximum pour $x = x'$; elle aurait passé par un minimum pour cette même valeur si la dérivée était négative dans le premier intervalle, positive dans le second; elle varierait dans le même sens dans tout l'intervalle (x_1, x_2) si la dérivée avait le même signe pour toutes les valeurs de x appartenant à cet intervalle, les nombres x_1, x', x_2 étant exceptés au besoin.

Par exemple la fonction $y = (\sqrt[3]{x})^2$, continue dans tout intervalle, n'admet pas de dérivée pour $x = 0$, pour toute autre valeur

de x elle a pour dérivée

$$y' = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}};$$

pour $x = 0$, la fonction y passe par un minimum.

226. — On voit d'après cela la marche à suivre pour étudier la variation d'une fonction donnée par son expression analytique. On décomposera d'abord l'ensemble des valeurs de x, de $-\infty$ à $+\infty$, en intervalles partiels tels que, dans chacun d'eux, la fonction soit définie et continue ; les bornes de ces intervalles pourront être des valeurs de x au delà ou en deçà desquelles l'expression donnée n'aura plus de sens ; de telles valeurs se présenteront par exemple quand l'expression contiendra des radicaux à indices pairs, des logarithmes, des fonctions circulaires inverses, etc. ; ces bornes pourront encore être des valeurs pour laquelle la fonction est discontinue, ou des nombres aussi voisins que l'on voudra de certaines valeurs isolées de la variable, telles que $x = 0$ pour la fonction $\frac{1}{x}$, pour lesquelles l'expression considérée n'a pas de sens, mais dans le voisinage desquelles elle grandit indéfiniment, ce que l'on exprime brièvement en disant que la fonction devient infinie. On se livrera à une étude analogue pour la dérivée, en se limitant toutefois aux valeurs de la variable qui appartiennent aux intervalles qu'il y a lieu de considérer, d'après l'étude préliminaire que l'on a faite de la fonction ; mais, cette fois, on portera essentiellement l'attention sur les valeurs de la variable pour lesquelles la dérivée change de signe, soit qu'elle s'annule, soit qu'elle cesse d'exister en devenant infinie, ou tout autrement. Ces nombres limiteront ainsi des intervalles pour lesquelles la dérivée conservera un signe constant. Les nombres qui bornent des intervalles soit pour la fonction proposée, soit pour la dérivée, étant ensuite rangés par ordre de grandeur, on se trouve avoir décomposé le champ de la variable x en intervalles partiels pour lesquels on peut appliquer les théorèmes du n° **222** ; à l'aide de ces théorèmes et des remarques contenues dans les numéros suivants, on parvient à avoir une idée nette de la marche de la fonction.

Soit par exemple la fonction

$$y = e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x+4};$$

elle n'a de sens ni pour les valeurs de x plus petites que -4, ni pour $x = 0$; sa dérivée, pour les autres valeurs de x, est

$$y' = e^{\frac{1}{x}} \frac{(x+2)(x-4)}{2x^2\sqrt{x+4}};$$

elle est positive pour $x < -2$, négative pour x compris entre -2 et 4, positive pour $x > 4$; si l'on désigne par ε un nombre positif, aussi petit que l'on veut, la fonction est continue de -4 à $-\varepsilon$, de $+\varepsilon$ à $+\infty$; si l'on considère la suite des nombres

$$-4, \quad -2, \quad -\varepsilon, \quad +\varepsilon, \quad 4, \quad +\infty;$$

et que l'on exclue l'intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$, la fonction sera continue et admettra (sauf pour $x = -4$) une dérivée de signe constant dans chacun des autres intervalles. On en conclut que lorsque x varie de -4 à -2, la fonction augmente de 0 à $\sqrt{\frac{2}{e}}$, qu'elle diminue depuis cette valeur jusqu'à

$$(1) \qquad e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\sqrt{4-\varepsilon}$$

quand x varie de -2 à $-\varepsilon$, qu'elle diminue encore depuis

$$(2) \qquad e^{\frac{1}{\varepsilon}}\sqrt{4+\varepsilon}$$

jusqu'à $e^{\frac{1}{4}}\sqrt{8}$ quand x varie de ε jusqu'à $+4$, enfin qu'elle augmente quand x varie depuis $+4$ jusqu'à $+\infty$.

Il reste à avoir des valeurs approchées des nombres (1) et (2) pour ε positif et très petit; on les déduit des formules

$$e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\sqrt{4-\varepsilon} = \frac{\sqrt{4-\varepsilon}}{1 + \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{1.2}\frac{1}{\varepsilon^2} + \ldots},$$

$$e^{\frac{1}{\varepsilon}}\sqrt{4+\varepsilon} = \sqrt{4+\varepsilon}\left(1 + \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{1.2}\frac{1}{\varepsilon^2} + \ldots\right);$$

la première, où le dénominateur peut être supposé aussi grand qu'on le veut, montre que lorsque ε tend vers zéro, l'expression (1) a pour limite zéro; on voit de même que lorsque ε tend vers zéro,

l'expression (2) augmente indéfiniment par valeurs positives ; c'est ce qu'on exprime plus brièvement en disant que, x croissant de — 2 à zéro, y diminue depuis $\sqrt{\frac{2}{e}}$ jusqu'à o, et que, x croissant depuis o jusqu'à + 4, y diminue depuis $+\infty$ jusqu'à la valeur $e^{\frac{1}{4}}\sqrt{8}$. Des deux valeurs $\sqrt{\frac{2}{e}}$ et $e^{\frac{1}{4}}\sqrt{8}$, la première est un maximum correspondant à la valeur $x = -2$, la seconde est un minimum correspondant à la valeur $x = 4$; enfin on voit de suite que lorsque x augmente indéfiniment par valeurs positives, il en est de même de y.

227. — Il est quelquefois commode, pour reconnaître si une valeur a de x qui annule la dérivée $f'(x)$ d'une fonction $f(x)$ fait acquérir à cette fonction un maximum ou un minimum, de recourir à la dérivée seconde $f''(x)$, à supposer qu'elle existe. Si $f''(a)$ est un nombre positif et si la fonction $f''(x)$ est encore positive pour les valeurs voisines de a, ce qui arrivera assurément si elle est continue, on voit que, dans un petit intervalle comprenant a, la fonction $f'(x)$ sera croissante ; puisqu'elle s'annule pour $x = a$, elle passe pour cette valeur du négatif au positif, il en résulte que, pour $x = a$, la fonction $f(x)$ présente un minimum. De même, si pour $x = a$, le nombre $f''(a)$ est négatif et si la fonction $f''(x)$ est continue pour $x = a$, on voit que, pour $x = a$, la fonction $f(x)$ présente un maximum. Si l'on a $f''(a) = 0$, on pourra recourir à la dérivée troisième ; si celle-ci n'est pas nulle pour $x = a$ et est continue pour cette valeur, elle conservera le même signe dans un petit intervalle comprenant le nombre a ; dans cet intervalle la fonction $f''(x)$ croîtra constamment ou décroîtra constamment ; puisqu'elle s'annule pour $x = a$, elle changera de signe en s'annulant ; la fonction $f'(x)$ admettra donc un maximum ou un minimum pour $x = a$; comme elle est nulle pour $x = a$, on voit que, dans un petit intervalle comprenant ce nombre, elle reste négative ou nulle si $x = a$ correspond à un maximum de $f'(x)$, positive ou nulle si $x = a$ correspond à un minimum de $f'(x)$; dans le premier cas la fonction $f(x)$ est décroissante dans ce même intervalle, dans le second cas elle est croissante : elle ne présente, pour $x = a$, ni maximum ni minimum. Si l'on a $f'''(a) = 0$, on recourra à la dérivée

quatrième $f^{\text{IV}}(x)$ et l'on verra sans peine que, suivant que l'on aura

$$f^{\text{IV}}(a) < 0, \qquad f^{\text{IV}}(a) > 0,$$

la fonction $f(x)$ admettra, pour $x = a$, un maximum ou un minimum, pourvu toutefois que la fonction f^{IV} soit continue pour $x = a$. Si l'on avait $f^{\text{IV}}(a) = 0$, on pourrait recourir à la dérivée cinquième, etc. On peut, en admettant l'existence et la continuité des dérivées successives $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ... de la fonction $f(x)$, pour $x = a$, formuler la règle suivante : Si pour $x = a$ la dérivée $f'(x)$ est nulle ainsi que quelques-unes de celles qui la suivent, la fonction $f(x)$ n'admet, pour $x = a$, ni maximum, ni minimum lorsque la première dérivée qui ne s'annule pas est d'ordre impair ; si la première dérivée qui ne s'annule pas est d'ordre pair, la valeur $x = a$ correspond à un maximum ou à un minimum, selon que cette dérivée est négative ou positive. Au reste, cette conclusion se retrouvera tout à l'heure.

228. — Les importantes propositions établies dans les nos **215** et **216** peuvent être généralisées de différentes façons. Voici, d'abord, une généralisation du théorème du no **216** qui, outre son utilité propre, éclaire la notion de la dérivée n^e [1].

Soit $f(x)$ une fonction qui, dans l'intervalle (a, b), admette des dérivées première et seconde, $f'(x)$ et $f''(x)$.

Soit x_0 un nombre appartenant à l'intervalle (a, b) et h_1, h_2, deux nombres tels que $x_0 + h_1$, $x_0 + h_2$, $x_0 + h_1 + h_2$ appartiennent aussi au même intervalle ; posons

$$f_1(x) = f(x + h_1) - f(x) ;$$

la fonction (de x) $f_1(x)$, admettra une dérivée dans l'intervalle $(x_0, x_0 + h_2)$ et cette dérivée sera

$$f_1'(x) = f'(x + h_1) - f'(x) ;$$

ceci posé on a, en désignant par θ_2 un nombre compris entre 0 et 1,

$$\begin{aligned} f_1(x_0 + h_2) - f_1(x_0) &= h_2 f_1'(x_0 + \theta_2 h_2) \\ &= h_2 [f'(x_0 + \theta_2 h_2 + h_1) - f'(x_0 + \theta_2 h_2)]. \end{aligned}$$

[1] Je dois ce numéro à M. Darboux.

Or, en vertu de la même formule, la quantité entre crochets peut être remplacée par $h_1 f''(x_0 + \theta_1 h_1 + \theta_2 h_2)$, en désignant par θ_1 un nombre compris entre o et 1 ; on aura donc finalement

$$\begin{aligned} & f_1(x_0 + h_2) - f_1(x_0) \\ & f(x_0 + h_1 + h_2) - f(x_0 + h_1) - f(x_0 + h_2) + f(x_0) \\ = & h_1 h_2 f''(x_0 + \theta_1 h_1 + \theta_2 h_2). \end{aligned}$$

On trouvera de même, en supposant que dans l'intervalle (a, b), la fonction $f(x)$ admette des dérivées jusqu'au n^e ordre $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$, et que les nombres

$$\begin{array}{lll} x_0 + h_1, & x_0 + h_2, \ldots, & x_0 + h_n, \\ x_0 + h_1 + h_2, & x_0 + h_1 + h_3, \ldots, & x_0 + h_{n-1} + h_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_0 + h_1 + h_2 + \ldots h_n & & \end{array}$$

appartiennent, ainsi que x_0, à l'intervalle (a, b),

$$\begin{aligned} & f(x_0 + h_1 + h_2 + \ldots + h_n) - \Sigma f(x_0 + h_1 + h_2 + \ldots + h_{n-1}) \\ & \quad + \Sigma f(x_0 + h_1 + h_2 + \ldots + h_{n-2}) - \ldots \pm \Sigma f(x_0 + h_1) \mp f(x_0) \\ & \quad = h_1 h_2 \ldots h_n f^{(n)}(x_0 + \theta_1 h_1 + \theta_2 h_2 + \ldots + \theta_n h_n) : \end{aligned}$$

dans le second membre, $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n$ désignent des nombres compris entre o et 1 ; dans le premier membre, chaque sommation s'étend à tous les termes qui se déduisent du terme écrit en remplaçant la suite des indices par les autres combinaisons, du même ordre, des nombres 1, 2, ..., n.

Si la fonction $f^{(n)}(x)$ est continue pour $x = x_0$, on voit que le premier membre, divisé par $h_1, h_2 \ldots h_n$, a pour limite $f^{(n)}(x_0)$ quand les quantités $h_1, h_2, \ldots, h_n$ tendent vers zéro ; d'une façon plus précise, si l'on désigne par $\varphi(x_0, h_1, h_2, \ldots, h_n)$ ce premier membre, on peut affirmer qu'à chaque nombre positif ε correspond un nombre positif η tel que l'on ait

$$\left| \frac{\varphi(x_0, h_1, h_2, \ldots, h_n)}{h_1 h_2 \ldots h_n} - f^{(n)}(x_0) \right| < \varepsilon,$$

sous les conditions

$$0 < |h_i| < \eta, \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Si l'on suppose (1) $h_1 = h_2 = \ldots = h_n = h$, et si l'on supprime l'indice 0 qui affecte x, on trouve

$$\begin{aligned} f(x+nh) - \frac{n}{1} f[x+(n-1)h] + \frac{n(n-1)}{1.2} f[x+(n-2)h] - \ldots \\ \pm \frac{n}{1} f(x+h) \mp f(x) \\ = h^n f^{(n)}(x+\theta nh), \end{aligned}$$

en désignant par θ un nombre compris entre 0 et 1. Le premier membre est la *différence* n^e de la fonction $f(x)$ pour la suite de valeurs en progression arithmétique

$$x, \quad x+h, \quad x+2h, \ldots, x+nh$$

de la variable : on la représente souvent par le symbole $\Delta^n f(x)$; on pose ainsi

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x+h) - f(x) \\ \Delta^2 f(x) &= \Delta f(x+h) - \Delta f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \\ \Delta^3 f(x) &= \Delta^2 f(x+h) - \Delta^2 f(x) = f(x+3h) - 3f(x+2h) \\ &\qquad + 3f(x+h) - f(x), \end{aligned}$$

. . . .

Dans le même symbolisme, h qui est la *différence* de deux valeurs consécutives de la variable, se représente par Δx, et l'on voit que la dérivée n^e peut être regardée comme la limite de l'expression

$$\frac{\Delta^n f(x)}{(\Delta x)^n}$$

quand h ou Δx tend vers 0 ; la notation $\frac{d^n f}{dx^n}$ pour représenter la dérivée n^e est en quelque sorte le résidu de cette remarque.

229. — Si la fonction $f(x)$ admet une dérivée dans l'intervalle (a, b) et si les nombres x_1, x_2, appartiennent à cet intervalle, il y a une racine de $f'(x)$ comprise entre x_1 et x_2 ; supposons que la fonction $f(x)$ s'annule pour les valeurs x_1, x_2, x_3 de la variable, que je suppose toujours appartenir à l'intervalle (a, b) et que je suppose en outre, rangées par ordre de grandeur ; il y aura une racine ξ_1 de $f'(x)$ entre x_1, x_2 et une autre racine ξ_2 entre x_2 et

x_3 ; si donc la fonction $f'(x)$ admet une dérivée $f''(x)$ dans l'intervalle (a, b), $f'(x)$ s'annulera pour une valeur de x comprise entre ξ_1 et ξ_2, par suite entre x_1 et x_3 ; il est clair qu'on peut continuer ainsi et énoncer de suite le théorème suivant :

Si, dans l'intervalle (a, b), la fonction $f(x)$ admet des dérivées jusqu'au $(n-1)^e$... ordre, inclusivement et si elle s'annule pour les n nombres distincts $x_1, x_2, \ldots, x_n$ appartenant à cet intervalle, il y a une valeur de x, comprise entre le plus petit et le plus grand des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pour laquelle $f^{(n-1)}(x)$ s'annule.

Cette proposition peut se généraliser encore.

Supposons que pour $x = x_1$ et pour $x = x_2$ la fonction $f(x)$ s'annule et que, en outre, la dérivée $f'(x)$ s'annule pour $x = x_1$; alors $f'(x)$ s'annule pour un nombre ξ_1 compris x_1 et x_2 ; mais $f'(x)$ s'annulant pour $x = x_1$ et $x = \xi_1$, il faut que $f''(x)$ s'annule pour un nombre ξ_2 compris entre x_1 et ξ_1 et, par suite entre x_1 et x_2 ; on voit que le nombre x_1, parce qu'il annule non seulement $f(x)$ mais encore $f'(x)$, joue en quelque sorte le rôle de deux racines ; c'est une circonstance qu'on a observée déjà pour les polynomes. Les remarques qu'on vient de faire conduisent immédiatement à la proposition que voici, et suffisent, avec un peu de réflexion, pour en reconnaître la vérité.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n nombres distincts, auxquels correspondent les nombres naturels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; je suppose que x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) annule la fonction $f(x)$ et ses $\alpha_i - 1$ premières dérivées ; si α_i était égal à 1, il faudrait entendre simplement que x_i annule $f(x)$. Il existe un nombre x compris entre le plus petit et le plus grand des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui annule la dérivée de $f(x)$ d'ordre $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - 1$.

La proposition suppose que la fonction $f(x)$ admette des dérivées jusqu'à l'ordre $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - 1$ inclusivement, dans un intervalle dont les bornes sont respectivement le plus grand et le plus petit des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Il est même bien aisé de voir, en remontant les raisonnements précédents et en se reportant au n° **215**, que si l'on est assuré de la continuité, dans tout l'intervalle considéré, de la dérivée d'ordre $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - 2$, l'existence de la dérivée d'ordre $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - 1$ n'est nécessaire pour la validité du théorème qu'à l'*intérieur* de cet intervalle. Il est à peine utile de dire que l'existence de la dérivée

d'ordre $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n - 1$ dans tout l'intervalle implique l'existence et la continuité dans ce même intervalle des dérivées d'ordre moindre.

230. — Supposons que, dans l'intervalle (a, b) auquel appartiennent les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la fonction $f(x)$ admette des dérivées jusqu'à l'ordre $p = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$, inclusivement. On a vu au n° **174** comment on pouvait construire un polynome $P(x)$ de degré inférieur à p, qui pour $x = x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, prenait, lui et ses $\alpha_i - 1$ premières dérivées, les mêmes valeurs respectives que la fonction $f(x)$ et ses $\alpha_i - 1$ premières dérivées, en sorte que pour $x = x_i$ la différence $f(x) - P(x)$ soit nulle ainsi que ses $\alpha_i - 1$ premières dérivées. Dans un grand nombre de cas, ce polynome fournit une valeur approchée de $f(x)$ pour les valeurs de x qui sont comprises entre le plus grand et le plus petit des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (interpolation). Le théorème précédent fournit une expression, qui peut être utile, de l'erreur que l'on commet ainsi, pour une valeur donnée x_0 de x, que je suppose appartenir aussi à l'intervalle (a, b).

Je représenterai cette erreur par

$$A(x_0 - x_1)^{\alpha_1}(x_0 - x_2)^{\alpha_2} \ldots (x_0 - x_n)^{\alpha_n},$$

en sorte que l'on ait

$$f(x_0) - P(x_0) - A(x_0 - x_1)^{\alpha_1}(x_0 - x_2)^{\alpha_2} \ldots (x_0 - x_n)^{\alpha_n} = 0.$$

A étant un nombre dont je vais chercher une évaluation. Considérons la fonction de x

$$f(x) - P(x) - A(x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2} \ldots (x - x_n)^{\alpha_n},$$

où A est, bien entendu, le même nombre que tout à l'heure ; ce fonction est nulle ainsi que ses $\alpha_i - 1$ premières dérivées pou $x = x_i (i = 1, 2, \ldots n)$, puisqu'il en est ainsi de $f(x) - P(x)$ par hypothèse, et du dernier terme, en vertu de sa forme ; elle est encore nulle pour $x = x_0$; sa dérivée d'ordre p devra donc s'annuler pour un nombre ξ intermédiaire au plus petit et au plus grand des nombres $x_0, x_1, \ldots, x_n$; or la dérivée d'ordre p du po-

lynome $P(x)$ est identiquement nulle, on aura donc

$$f^{(p)}(\xi) - 1.2\ldots pA = 0$$

et, par suite, en mettant x à la place de x_0,

$$f(x) = P(x) + \frac{(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2}\ldots(x-x_n)^{\alpha_n}}{1.2\ldots p} f^{(p)}(\xi)\ (^1).$$

Si, en particulier, on veut que le polynome P et ses $p-1$ premières dérivées prennent respectivement pour $x=x_1$, les mêmes valeurs que $f(x)$ et ses $p-1$ premières dérivées, on devra prendre (n° **174**),

$$P = f(x_1) + \frac{x-x_1}{1} f'(x_1) + \frac{(x-x_1)^2}{1.2} f''(x_1) + \ldots + \frac{(x-x_1)^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)} f^{(p-1)}(x_1),$$

et la formule générale conduit à celle-ci :

$$f(x) = f(x_1) + \frac{x-x_1}{1} f'(x_1) + \frac{(x-x_1)^2}{1.2} f''(x_1) + \ldots + \frac{(x-x_1)^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)} f^{(p-1)}(x_1)$$
$$+ \frac{(x-x_1)^p}{1.2\ldots p} f^{(p)}(\xi),$$

qui suppose l'existence des p premières dérivées dans l'intervalle (a, b) auquel sont supposés appartenir les nombres x, x_1 ; ξ est compris entre ces deux nombres.

(^1) La méthode qui vient de servir pour la détermination du nombre A s'applique dans beaucoup de questions analogues. Je me contente d'écrire les formules suivantes que le lecteur n'aura aucune peine à établir par cette voie.

$$\text{(I)}\quad f(b) - f(a) = \frac{(b-a)}{2}[f'(b)+f'(a)] - \frac{(b-a)^2}{12}[f''(b)-f''(a)] + \frac{(b-a)^5}{720} f^{v}(\xi),$$

$$\text{(II)}\quad f(b) - f(a) = \frac{b-a}{6}\left[f'(a) + f'(b) + 4f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] + \frac{(b-a)^5}{2880} f^{v}(\xi),$$

$$\text{(III)}\quad f(a) + f(b) - 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = (b-a)^2 f''(\xi).$$

Pour chacune de ces trois formules on suppose que, dans l'intervalle (a, b) les dérivées de la fonction $f(x)$ existent, au moins jusqu'à l'ordre le plus élevé de la dérivée qui figure dans la formule ; ξ représente toujours un nombre compris entre a et b. La formule (I) est un cas particulier d'une formule générale qui sera établie plus tard ; la formule (III) ne diffère que par les notations d'un résultat établi au n° **228** pour $n = 2$.

231. — Cette dernière formule, avec un léger changement dans la forme du dernier terme, peut se déduire aisément du théorème des accroissements finis et de la dernière identité du n° **210**.

Soient en effet $f(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions de x qui, dans l'intervalle (a, b), admettent des dérivées jusqu'à l'ordre p. Si l'on suppose que les $(p-1)^{\text{res}}$ dérivées soient continues dans cet intervalle, il suffira d'ailleurs d'admettre l'existence de la p^{e} dérivée *à l'intérieur* de l'intervalle. La dérivée de la fonction

$$f(x)\varphi^{(p-1)}(x) - f'(x)\varphi^{(p-2)}(x) + \ldots + (-1)^{p-1}f^{(p-1)}(x)\varphi(x)$$

est égale (n° **210**) à

$$f(x)\varphi^{(p)}(x) + (-1)^{p-1}f^{(p)}(x)\varphi(x).$$

La différence entre les valeurs que prend cette fonction pour $x = b$, $x = a$ sera donc égale au produit de $b - a$ par la valeur de la dérivée pour une valeur ξ comprise entre a et b ; en d'autres termes, on aura

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &f(b)\varphi^{(p-1)}(b) - f(a)\varphi^{(p-1)}(a) - [f'(b)\varphi^{(p-2)}(b) - f'(a)\varphi^{(p-2)}(a)] \\ &+ [f''(b)\varphi^{(p-3)}(b) - f''(a)\varphi^{(p-3)}(a)] - \ldots + (-1)^{p-1}[f^{(p-1)}(b)\varphi(b) - f^{(p-1)}(a)\varphi(a)] \\ &= (b-a)[f(\xi)\varphi^{(p)}(\xi) + (-1)^{p-1}f^{(p)}(\xi)\varphi(\xi)]. \end{aligned}\right.$$

Cette formule est susceptible d'un très grand nombre d'applications ([1]). Si, en particulier $\varphi(x)$ est un polynome du degré $p - 1$, le terme $f(\xi)\varphi^{(p)}(\xi)$ disparaîtra du second membre ; d'un autre côté $\varphi^{(p-1)}(x)$ se réduisant à une constante, les quantités $\varphi^{(p-1)}(b)$, $\varphi^{(p-1)}(a)$ seront égales. Si l'on veut en outre faire disparaître les termes

$$f'(b)\varphi^{(p-2)}(b),\quad f''(b)\varphi^{(p-3)}(b),\quad \ldots,\quad f^{(p-1)}(b),$$

il suffira de prendre pour $\varphi(x)$ un polynome qui s'annule pour $x = b$, ainsi que ses $p - 2$ premières dérivées, en sorte que b sera une racine multiple d'ordre $p - 1$ pour $\varphi(x)$; prenons ce

([1]) Voir dans le t. II de la 3e série du *Journal de Liouville*, p. 295, le Mémoire de M. Darboux, *Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable.*

polynome sous la forme

$$\varphi(x) = \frac{(b-x)^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)},$$

on aura

$$\varphi^{(r)}(x) = (-1)^r \frac{(b-x)^{p-r-1}}{1.2\ldots(p-r-1)};$$

La formule (1) deviendra, après avoir divisé par $(-1)^{p-1}$,

$$(2)\quad \begin{cases} f(b) - f(a) - \dfrac{b-a}{1} f'(a) - \dfrac{(b-a)^2}{1.2} f''(a) - \ldots - \dfrac{(b-a)^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)} f^{(p-1)}(a) \\ \qquad = (b-a) \dfrac{(b-\xi)^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)} f^{(p)}(\xi); \end{cases}$$

C'est la même formule que celle qui termine le précédent numéro, sauf la différence entre les notations, d'une part, et d'autre part entre la forme du dernier terme de la formule rappelée et du second membre de la présente formule.

Au reste, il est aisé, en utilisant toujours l'identité du n° **210**, et en rapprochant le raisonnement de celui qu'on a employé dans le numéro précédent, de parvenir à une formule un peu plus générale. Si on désigne en effet par r un nombre naturel, au plus égal à p et par $A(b-a)^r$ la valeur du premier terme de l'égalité (1), en sorte que la fonction de x

$$\begin{gathered} f(b)\varphi^{(p-1)}(b) - f(x)\varphi^{(p-1)}(x) - [f'(b)\varphi^{(p-2)}(b) - f'(x)\varphi^{(p-2)}(x)] \\ + [f''(b)\varphi^{(p-3)}(b) - f''(x)\varphi^{(p-3)}(x)] \ldots + (-1)^{p-1}[f^{(p-1)}(b)\varphi(b) - f^{(p-1)}(x)\varphi(x)] \\ - A(b-x)^r \end{gathered}$$

soit nulle pour $x=a$ et $x=b$, la dérivée de cette fonction devra s'annuler pour un nombre ξ compris entre a et b et différent de ces nombres ; on en conclut

$$-[f(\xi)\varphi^{(p)}(\xi) + (-1)^{p-1} f^{(p)}(\xi)\varphi(\xi)] + rA(b-\xi)^{r-1} = 0,$$

en sorte que, en adoptant pour le polynome $\varphi(x)$ la même détermination que tout à l'heure, on aura

$$A = \frac{(-1)^{p-1}(b-\xi)^{p-r}}{r.\,1.\,2.\ldots(p-1)} f^{(p)}(\xi),$$

et, d'autre part,

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{1.2} f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^{p-1}}{1.2\ldots p-1} f^{(p-1)}(a)$$
$$+ \frac{(b-\xi)^{p-r}(b-a)^r}{r.1.2.\ldots(p-1)} f^{(p)}(\xi).$$

C'est, pour $r = 1$, la formule (2), et pour $r = p$, la formule qui termine le précédent numéro.

En remplaçant dans la formule précédente b par $a + h$, et ξ par $a + \theta h$, où θ désigne un nombre positif plus petit que 1, elle devient

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \ldots$$
$$+ \frac{h^{p-1}}{1.2\ldots(p-1)} f^{(p-1)}(a) + \frac{h^p(1-\theta)^{p-r}}{r\,1.2\ldots(p-1)} f^{(p)}(a+\theta h),$$

on donne habituellement à cette formule le nom de formule de Taylor ; le dernier terme s'appelle reste ou terme complémentaire. La nouvelle forme qu'on vient de donner à ce reste offre quelque intérêt pour certaines applications, mais la véritable importance de la formule de Taylor n'est pas dans ce reste ; elle est dans le fait que la fonction $f(x)$, au voisinage d'une valeur a de la variable, se comporte à peu près comme un polynome ordonné suivant les puissances ascendantes de l'accroissement h de la variable ; c'est sur ce point que je vais insister.

232. — Supposons que la fonction $f(x)$ admette dans l'intervalle (A, B) des dérivées jusqu'à l'ordre p inclusivement et que la p^e dérivée soit bornée dans cet intervalle (c'est ce qui arrivera si elle y est continue) ; supposons que a soit intérieur à l'intervalle (A, B), la formule précédente sera valable pourvu que la valeur absolue de h soit suffisamment petite, et l'on voit que, pour les valeurs $x = a + h$ de la variable voisines de a, la fonction $f(x)$ se comporte comme une de ces expressions très voisines d'un polynome ordonné suivant les puissances croissantes de la variable h, ou $x - a$, dont il a été question au n° **173**, dans lesquelles seul le coefficient de la plus haute puissance de la variable n'est pas une constante, mais bien une fonction bornée de cette variable ; pour

les petites valeurs de h cette expression se comportera comme un polynome ; elle fournira, en prenant un, deux, trois, ... termes, des valeurs approchées de la fonction ; le premier terme qui n'est pas nul dans le second membre donnera le signe de $f(a+h)$ [ou de $f(x)$] pour les petites valeurs de h [ou pour les valeurs de x voisines de a]; la parité et le signe de la première des dérivées $f'(a), f''(a)$, ... qui n'est pas nulle renseignera sur le sens de la variation de $f(x)$ pour $x=a$, etc. Tout ceci a été suffisamment expliqué à propos des polynomes pour que je ne m'y arrête pas davantage. Je rappelle enfin, que si l'on se fixe le nombre naturel p, il n'y pas, en dehors du second membre, d'autre expression de la forme

$$A_0 + A_1 h + \dots \qquad + A_{p-1} h^{p-1} + A_p h^p,$$

où A_0, A_1, ..., A_{p-1} soient des constantes et A_p une fonction bornée, qui puisse être égale à $f(a+h)$ pour les petites valeurs de h. En d'autres termes, un développement de cette nature n'est susceptible que d'une seule forme. Cette remarque est souvent utilisée pour le calcul de la r^e dérivée d'une fonction $f(x)$, r étant un nombre naturel $< p$. Si l'on a pu en effet calculer d'une façon ou d'une autre le développement

$$A_0 + A_1 h + \dots + A_r h^r + \dots + A_{p-1} h^{p-1} + A_p h^p,$$

on aura

$$f^{(r)}(a) = 1 . 2 \dots r . A.$$

Il convient de noter le cas où a est nul : on suppose bien entendu que o appartient à un intervalle où la fonction $f(x)$ admet des dérivées jusqu'à l'ordre p inclusivement ; on a alors, en remplaçant h par x ;

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1 . 2} f''(0) + \dots$$
$$+ \frac{x^{p-1}}{1 . 2 \dots p-1)} f^{(p-1)}(x) + \frac{x^p (1-\theta)^{p-r}}{r . 1 . 2 \dots (p-1)} f^p(\theta x) ;$$

elle convient particulièrement à l'étude de la fonction pour les petites valeurs de x. Il va de soi que, si l'on connaît d'ailleurs un

développement en série entière

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{p-1} x^{p-1} + a_p x^p + \ldots,$$

on connaîtra par là même les valeurs pour $x = 0$ des quantités $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, ..., $f^{p-1}(0)$; quant au reste ou au terme complémentaire, c'est le produit par x^p de la somme de la série convergente

$$a_p + a_{p+1} x + a_{p+2} x^2 + \ldots$$

233. — L'étude d'une fonction aux environs d'une valeur a de la variable se ramène, en posant $x = a + h$, au cas où la valeur de la variable, aux environs de laquelle on veut étudier la fonction, est nulle ; de même, si l'on veut étudier la fonction pour les valeurs de la variable très grandes en valeur absolue, on posera $x = \frac{1}{z}$; c'est ce qui a été déjà dit, à propos des polynomes ou des fractions rationnelles, (nos **173**, **174**). Je me limiterai donc, dans ce qui suit, au cas où l'on veut étudier une fonction aux environs de la valeur 0 de la variable.

I. Cette étude est très facilitée lorsqu'on peut ordonner la fonction sous une forme telle que

$$f(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \ldots + \varphi_p(x),$$

où $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ..., sont des expressions aisées à calculer, dont chacune, lorsque x tend vers 0, est infiniment petite par rapport à celle qui la précède : on entend par là que les rapports

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_0(x)}, \quad \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)}, \quad \frac{\varphi_3(x)}{\varphi_2(x)}, \ldots$$

ont pour limite 0 quand x tend vers 0. S'il en est ainsi, il est clair que chacune des expressions

$$\varphi_0(x), \quad \varphi_0(x) + \varphi_1(x), \quad \varphi_0(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \ldots$$

constitue une expression approchée de $f(x)$, pour les valeurs de x voisines de 0, en ce sens que l'erreur *relative* commise en remplaçant $f(x)$ par l'une de ces fonctions tend vers 0 quand x tend vers 0 : si le premier terme que l'on néglige, dans la suite

$\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, ... est infiniment petit avec x, c'est-à-dire, tend vers o avec x, l'erreur *absolue* est infiniment petite avec x.

Suivant que l'on aura

$$\lim_{x=0} \varphi_0(x) = +\infty, \quad \lim_{x=0} \varphi_0(x) = -\infty, \quad \lim_{x=0} \varphi_0(x) = A,$$
$$\lim_{x=0} \varphi_0(x) = 0,$$

il est clair qu'on aura de même

$$\lim_{x=0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x=0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x=0} f(x) = A,$$
$$\lim_{x=0} f(x) = 0.$$

Il est bien clair aussi que, pour les valeurs de x suffisamment voisines de o, le signe de $f(x)$ est le même que celui de $\varphi_0(x)$. Cela revient à dire, dans le cas où $\varphi_0(x)$ est infiniment petit (absolument) avec x, que la fonction $f(x)$ est croissante ou décroissante pour $x = 0$ suivant que la fonction $\varphi_0(x)$ est elle-même une fonction croissante ou décroissante, pour $x = 0$.

II. Un cas particulier très fréquent, est celui où la fonction $f(x)$, dans le voisinage de $x = 0$, peut se mettre sous la forme

$$f(x) = A_0 x^{\alpha_0} + A_1 x^{\alpha_1} + \dots + A_{p-1} x^{\alpha_{p-1}} + A_p x^{\alpha_p}$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des nombres croissants, où $A_0, A_1, \dots, A_{p-1}$, sont des constantes et A_p une fonction de x, bornée lorsque x reste voisin de o. Tel est le cas pour les polynomes et les fractions rationnelles (n[os] **173**, **174**). Tel est encore le cas pour les fonctions développables en une série entière en x

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{p-1} x^{p-1} + a_p x^p + \dots,$$

que je suppose absolument convergente pour les petites valeurs de x, en prenant pour A_p la somme de la série convergente

$$a_p + a_{p+1} x + a_{p+2} x^2 + \dots.$$

Tel est encore le cas pour les fonctions pour lesquelles les formules du numéro précédent sont valables, en supposant, bien en-

tendu, que le coefficient de x^p dans le terme complémentaire, soit une fonction bornée.

Dans ces différents cas, les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont entiers et l'on peut supposer que x tende vers o, soit par valeurs positives, soit par valeurs négatives. Il en serait autrement si quelqu'un de ces nombres était ou un nombre irrationnel ou une fraction irréductible à dénominateur pair, auquel cas on ne pourrait considérer que des valeurs positives de x.

Notons que la forme considérée sera particulièrement utile si le nombre α_p, au moins, est positif, puisque alors, l'erreur commise en négligeant le dernier terme est infiniment petite avec x.

Notons encore que plusieurs expressions du type considéré peuvent se combiner par addition, soustraction, multiplication ; et même par division (en effectuant cette dernière opération par une règle analogue à celle qui sert pour les polynomes) de manière à reproduire des expressions qui soient encore du même type, et servent au même usage. Il convient toutefois d'observer que ces expressions finales n'auront le plus souvent d'utilité que dans le cas où elles contiennent au commencement des termes à coefficients constants, non nuls, et où le dernier terme est infiniment petit avec x.

III. Plus particulièrement encore, il arrive fréquemment qu'on ait affaire à des expressions de la forme $x^m P(x)$ dans laquelle $P(x)$ est, soit une série entière en x, soit une de ces sortes de polynomes ordonnés suivant les puissances entières de x, dans lesquels le coefficient de la plus haute puissance de x est une fonction bornée, au lieu d'être une constante, comme les expressions que l'on a considérées dans le numéro précédent. Dans les deux cas, je suppose essentiellement que $P(x)$ commence par un terme constant, différent de o, en d'autres termes que $P(0)$ n'est pas nul. Il est clair que deux expressions de ce type, $x^m P(x)$, $x^n Q(x)$, si on les multiplie l'une par l'autre, reproduisent une expression du même type $x^{m+n} R(x)$, où $R(x) = P(x) Q(x)$; si l'on suppose en particulier

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{r-1} x^{r-1} + a_r x^r,$$
$$Q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{r-1} x^{r-1} + b_r x^r,$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}, b_0, b_1, \ldots, b_{r-1}$ sont des constantes et a_r, b_r des

fonctions bornées, on aura de même

$$R(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{r-1} x^{r-1} + c_r x^r,$$

où les constantes $c_0, c_1, \ldots, c_{r-1}$ ne dépendront que des constantes $a_0, \ldots, a_{r-1}, b_0, \ldots, b_{r-1}$ et auront les mêmes valeurs que si l'on avait multiplié simplement les deux polynomes qui se déduisent de $P(x)$, $Q(x)$ en supprimant les termes complémentaires $a_r x^r$, $b_r x^r$; de même encore si l'on divise l'une par l'autre les expressions $x^m P(x)$, $x^n Q(x)$, on aura une expression du même type $x^{m-n} S(x)$, $S(x)$ commençant par un polynome $d_0 + d_1 x + \ldots + d_{r-1} x^{r-1}$ à coefficients constants, qui serait le même que celui obtenu en effectuant la division de

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_{r-1} x^{r-1} \quad \text{par} \quad b_0 + b_1 x + \ldots + b_{r-1} x^{r-1}$$

et en s'arrêtant dès que le reste est divisible par x^r.

De même encore si l'on élève à une puissance α l'expression $x^m P(x)$, on obtiendra l'expression

$$x^{m\alpha}\left[P(x)\right]^\alpha = a_0^\alpha x^{m\alpha}\left[1 + \varphi(x)\right]^\alpha,$$

dans laquelle on a posé

$$\varphi(x) = \frac{a_1}{a_0} x + \frac{a_2}{a_0} x^2 + \ldots + \frac{a_{r-1}}{a_0} x^{r-1} + \frac{a_r}{a_0} x^r.$$

et dans laquelle, si α est un nombre irrationnel ou une fraction irréductible à dénominateur pair, on doit supposer $a_0 > 0$, pour que a_0 ait un sens. On a d'ailleurs

$$\left[1 + \varphi(x)\right]^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1}\varphi(x) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}\left[\varphi(x)\right]^2 + \ldots$$
$$+ \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-r+1)}{1.2\ldots r}\left[\varphi(x)\right]^r A$$

où il est clair que A est une fonction bornée dans le voisinage de o. On voit de suite que le second membre peut s'ordonner sous la forme

$$1 + k_1 x + k_2 x^2 + \ldots + k_{r-1} x^{r-1} + k_r x^r,$$

que les coefficients constants $k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}$ ne dépendent que de $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$, que ces coefficients sont les mêmes que si l'on s'était servi, au lieu de $\varphi(x)$, du polynome qu'on en déduit en supprimant le dernier terme $\frac{a_r}{a_0}x^r$ et si l'on avait limité au terme

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-r+2)}{1.2\ldots(r-1)}[\varphi(x)]^{r-1}$$

le développement de $[1+\varphi(x)]^\alpha$; de cette façon on aura mis la puissance α de $x^n P(x)$ sous la forme $x^{n\alpha}\,T(x)$, appartenant au type considéré.

L'exemple qu'on vient de traiter suggère la remarque suivante qui peut être commode. Si dans l'expression

$$A_0 + A_1 y + \ldots + A_{r-1} y^{r-1} + A_r y^r$$

dans laquelle $A_0, A_1, \ldots, A_{r-1}$ sont des constantes et A_r une fonction bornée quand y reste voisin de o, on remplace y par l'expression

$$\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{r-1} x^{r-1} + \alpha_r x^r$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r-1}$ sont des constantes et α_r une fonction bornée lorsque x est voisin de o, on obtient une expression de la forme

$$B_0 + B_1 x + \ldots + B_{r-1} x^{r-1} + B_r x^r$$

où $B_0, B_1, \ldots, B_{r-1}$ sont encore des constantes et B_r une fonction bornée ; pour calculer $B_0, B_1, \ldots, B_{r-1}$, il suffit, dans le polynome en y

$$A_0 + A_1 y + \ldots + A_{r-1} y^{r-1},$$

de remplacer x par le polynome

$$\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{r-1} x^{r-1},$$

d'ordonner par rapport aux puissances de x, en négligeant les termes de degré égal ou supérieur à r.

Ce que je viens de dire suffit amplement pour que le lecteur comprenne que, si l'on veut parvenir à ces expressions approchées d'une fonction qui permettent de la calculer approximativement et

de se rendre compte de son allure pour les valeurs de x voisines de o, on peut, dans bien des cas, se borner à effectuer des calculs sur des polynomes ordonnés suivant les puissances ascendantes de la variable. Toute l'habileté consiste à ne conserver dans ces polynomes que les termes dont on a besoin pour arriver au résultat désiré. Les remarques qui précèdent suffiront le plus souvent à atteindre ce but.

234. — Les observations que l'on a faites dans le précédent numéro sont particulièrement utiles pour déterminer les limites, pour une valeur donnée de la variable, d'expressions qui, pour cette valeur, prennent une forme illusoire ; telles sont par exemple les expressions

$$\frac{x - \sin x}{x^3}, \qquad (2x - \pi)\operatorname{tg}^2 x$$

la première pour $x = 0$, la seconde pour $x = \frac{\pi}{2}$. Les fonctions, pour ces valeurs respectives de x, ne sont pas définies ; elles sont définies pour les valeurs voisines ; il est naturel de se demander si elles ont une limite, et d'une façon plus générale comment elles se comportent : il suffira pour la première de remplacer au numérateur $\sin x$ par $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots$; elle deviendra alors, après avoir effectué la division par x^3,

$$\frac{1}{6} - \frac{x^2}{120} + \ldots$$

et l'on voit de suite que la fonction considérée admet $\frac{1}{6}$ pour limite, pour $x = 0$; on dit, avec la même signification, que, pour $x = 0$, sa *vraie valeur* est $\frac{1}{6}$; on voit de plus que si on lui attribue effectivement cette valeur, elle est continue pour $x = 0$ et passe par un maximum.

Pour l'expression $(2x - \pi)\operatorname{tg}^2 x$, on y fera $x = \frac{\pi}{2} + h$; elle deviendra

$$\frac{2h}{\operatorname{tg}^2 h} = \frac{2h\cos^2 h}{\sin^2 h}$$

et en remplaçant $\sin h$ et $\cos h$ par $h - \frac{h^3}{6} + \ldots$, $1 - \frac{h^2}{2} + \ldots$,

$$\frac{2h\left(1 - \frac{h^2}{2} + \ldots\right)^2}{h^2\left(1 - \frac{h^2}{6} + \ldots\right)^2} = \frac{2}{h}\,\frac{1 - h^2 + \ldots}{1 - \frac{h^2}{3} + \ldots} = \frac{2}{h} - \frac{4}{3}h + \ldots$$

$$= \frac{2}{x - \frac{\pi}{2}} - \frac{4}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \ldots ;$$

lorsque x s'approche de $\frac{\pi}{2}$, $\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}^2 x$ se comporte comme la fraction $\frac{2}{x - \frac{\pi}{2}}$, et tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ suivant que x s'approche de $\frac{\pi}{2}$ par des valeurs plus grandes que $\frac{\pi}{2}$, ou plus petites; la différence

$$(2x - \pi)\operatorname{tg}^2 x - \frac{2}{x - \frac{\pi}{2}}$$

a pour limite 0, quand x s'approche de $\frac{\pi}{2}$.

Soit à évaluer l'expression

$$\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{4x^2 - 1} - 3x$$

pour des valeurs positives très grandes de x; on devrait, d'après la règle donnée au n° **232** poser $x = \frac{1}{z}$ et étudier la fonction trouvée pour z voisin de 0; on va faire exactement les mêmes calculs, sans toutefois faire ce changement de variables; on a

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= x\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \ldots\right]$$

$$= x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\frac{1}{x} + \ldots;$$

$$\sqrt{4x^2 - 1} = 2x\left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2x - \frac{1}{4}\frac{1}{x} + \ldots,$$

et par suite

$$\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{4x^2-1}-3x = \frac{1}{2}+\frac{1}{8}\frac{1}{x}+\ldots ;$$

le second membre, pour $x=+\infty$, admet la limite $\frac{1}{2}$ dont il s'approche en décroissant.

Proposons-nous d'obtenir une expression approchée, pour les valeurs de x voisines de o, de la fonction

$$y=(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}$$

en désignant par α un nombre donné quelconque ; le logarithme de cette fonction sera

$$\log y=\frac{1}{x}\log(1+\alpha x)=\alpha-\frac{\alpha^2 x}{2}+\frac{\alpha^3 x^2}{3}-\frac{\alpha^4 x^3}{4}+\ldots=\alpha+z,$$

en posant

$$z=-\frac{\alpha^2 x}{2}+\frac{\alpha^3 x^2}{3}-\frac{\alpha^4 x^3}{4}+\ldots :$$

on a donc

$$y=e^{\log y}=e^{\alpha}\times e^{z}=e^{\alpha}\left(1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots\right);$$

si l'on veut, dans l'expression que l'on cherche, ne garder que les termes de degré égal ou inférieur à 3 (en x), on s'arrêtera dans le développement de y au terme en z^3, et l'on y remplace

$$z \quad \text{par} \quad -\frac{\alpha^2 x}{2}+\frac{\alpha^3 x^2}{3}-\frac{\alpha^4 x^3}{4},$$

$$z^2 \quad \text{par} \quad \frac{\alpha^4 x^2}{4}-\frac{\alpha^5 x^3}{3},$$

$$z^3 \quad \text{par} \quad -\frac{\alpha^6 x^3}{8};$$

on trouve ainsi

$$(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}}=e^{\alpha}\left[1-\frac{\alpha^2}{2}x+\frac{\alpha^2(8+3\alpha^2)}{24}x^2-\frac{\alpha^4(12+8\alpha+\alpha^2)}{48}x^3 + Ax^4\right],$$

A étant une fonction bornée pour les valeurs de x voisines de o. On conclura, par exemple, de cette formule que la limite, pour $x = 0$, de

$$\frac{(1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} - e^\alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}x\right)}{x^2}$$

ou la limite pour m infini de

$$m^2\left(1 + \frac{\alpha}{m}\right)^m - me^\alpha\left(m - \frac{\alpha^2}{2}\right)$$

est

$$\frac{e^\alpha(8+3\alpha^2)\alpha^2}{24}.$$

Les exemples qui précèdent suffisent à faire comprendre l'usage des méthodes qui ont été expliquées dans ce numéro ; il convient de rapprocher de ces méthodes les résultats suivants, relatifs aux fonctions exponentielle et logarithmique, que l'on a établis aux n^{os} **191**, **192**.

Quelque soit le nombre positif n, on a en supposant que x ne prenne que des valeurs positives

$$\lim_{x=\infty}(x^n e^{-x}) = 0, \quad \lim_{x=\infty}(x^{-n} e^x) = +\infty, \quad \lim_{x=0}\left(x^n e^{\frac{1}{x}}\right) = +\infty,$$

$$\lim_{x=0}(x^n \log x) = 0, \quad \lim_{x=\infty}(x^{-n}\log x) = 0.$$

Pour des valeurs négatives de x, on aura en supposant toujours n positif, mais égal soit à un nombre naturel, soit à une fraction irréductible dont le dénominateur est impair,

$$\lim_{x=-\infty}(x^n e^{-x}) = +\infty, \quad \lim_{x=0}\left(x^n e^{\frac{1}{x}}\right) = 0.$$

La formule $\lim\limits_{x=\infty}(x^{-n}\log x) = 0$, par exemple, permettra au lecteur de reconnaître que la série

$$\frac{1}{(\log 2)^n} + \frac{1}{(\log 3)^n} + \cdots + \frac{1}{(\log p)^n} + \cdots$$

est toujours divergente ; il suffit pour cela de la comparer à la série divergente

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} + \dots$$

et de constater, (n° **130**), que le rapport du terme de rang $p - 1$ dans la première au terme de même rang dans la seconde, rapport qui est l'inverse de

$$p^{-1} (\log p)^n = \left[p^{-\frac{1}{n}} \log p\right]^n$$

augmente indéfiniment avec p.

Lorsque x tend vers 0 par valeurs positives, l'expression x^x tend vers 1, puisque son logarithme, dans les mêmes conditions tend vers 0.

Les méthodes et les résultats qu'on vient d'exposer sont d'un usage courant ; bien que les règles que je vais expliquer, relatives à la recherche de la limite d'une fraction dont les deux termes s'annulent ou deviennent infinis pour une même valeur de x soient d'un usage moins fréquent, elles ont cependant quelque intérêt par elle-même ; avant de les établir, je démontrerai d'abord un lemme.

234. — Soit $f(x)$ une fonction admettant une dérivée $f'(x)$ à l'intérieur de l'intervalle (a, x_1), où l'on suppose $a < x_1$, et telle que, pour les valeurs de x intérieures à cet intervalle, on ait

$$\lim_{x = x_1} |f(x)| = +\infty ;$$

il existe une suite infinie de nombres $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$, tous intérieurs à cet intervalle et tels que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} \xi_n = x_1, \qquad \lim_{n=\infty} |f'(\xi_n)| = +\infty.$$

Soient en effet A un nombre positif quelconque, α et x deux nombres quelconques intérieurs à l'intervalle (a, x_1), on aura

$$\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\xi)$$

en désignant par ξ un nombre compris entre α et x ; pour que l'on ait $|f'(\xi)| > A$, il suffit de choisir x de façon que l'on ait

$$|f(x)| > |f(\alpha)| + |x - \alpha| A,$$

ce qui est certainement possible, puisque $|f(x)|$ grandit indéfiniment quand x s'approche de x_1. Désignons maintenant par A_1, A_2, ..., A_n, ... une suite de nombres positifs telle que l'on ait $\lim\limits_{n=\infty} A_n = +\infty$; par a_1, a_2, ..., a_n, ... une suite de nombres intérieurs à l'intervalle (a, x_1) tels que l'on ait $\lim\limits_{n=\infty} a_n = x_1$: désignons enfin par ξ_n, le nombre ξ déterminé comme on vient de l'expliquer en prenant $\alpha = a_n$, $A = A_n$; on aura

$$a_n < \xi_n < x_1, \qquad |f'(\xi_n)| > A_n,$$

ces inégalités et les hypothèses faites sur les suites dont a_n et A_n sont les n^{es} termes mettent en évidence la vérité de la proposition énoncée. Il est bien clair que si, à l'intérieur de l'intervalle (a, x_1), la dérivée $f'(x)$ est soit toujours croissante, soit toujours décroissante, on aura, pour les valeurs de x intérieures à cet intervalle, soit $\lim\limits_{x=x_1} f'(x) = +\infty$, soit $\lim\limits_{x=x_1} f'(x) = -\infty$.

Il est clair aussi qu'on aurait un théorème analogue pour le cas où la fonction $f(x)$ augmenterait indéfiniment, en valeur absolue, quand x tend vers x_1 par des valeurs plus grandes que x_1.

235. — Les règles que j'ai maintenant en vue concernent la recherche de la vraie valeur d'une fraction $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ dont le numérateur et le dénominateur s'annulent ou deviennent infinis pour une même valeur de x.

Plaçons-nous d'abord dans le premier cas, et supposons que les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ soient nulles pour $x = a$, que ce nombre a appartienne à un intervalle (p, q) dans lequel les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ admettent des dérivées $f'(x)$, $\varphi'(x)$, dans lequel enfin les fonctions $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ ne s'annulent pas, sauf pour $x = a$.

Dans ces conditions, je vais montrer que, si le rapport $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ tend vers une limite l lorsque x tend vers a par des valeurs appar-

tenant à l'intervalle (p, q), le rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ tendra aussi vers cette limite.

Si, en effet, le rapport $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ tend vers l, à chaque nombre positif ε correspondra un nombre positif η, tel que l'on ait

$$\left| \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} - l \right| < \varepsilon,$$

sous la condition que x appartienne à l'intervalle (p, q) et que l'on ait

$$0 < |x - a| < \eta.$$

Pour ces mêmes valeurs de x, on a

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

ξ étant un nombre compris entre x et a et satisfaisant donc aux inégalités $0 < |\xi - a| < \eta$: on aura par conséquent

$$\left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} - l \right| = \left| \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} - l \right| < \varepsilon;$$

ainsi, à chaque nombre positif ε correspond un nombre positif η tel que les inégalités $0 < |x - a| < \eta$ entraînent l'inégalité

$$\left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} - l \right| < \varepsilon,$$

en supposant toujours que x appartienne à l'intervalle (p, q). C'est dire que lorsque x tend vers a, le rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ tend vers l.

On ne peut pas conclure de la démonstration précédente que, réciproquement, si le rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ tend vers la limite l lorsque x tend vers a, le rapport $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ tend vers la même limite ; on peut toutefois affirmer l'existence d'une suite infinie de nombres ξ_1, ξ_2,

.., ξ_n, ... appartenant à l'intervalle (p, q) et ayant pour limite le nombre a, telle que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} \frac{f'(\xi_n)}{\varphi'(\xi_n)} = l.$$

En effet si, en supposant

$$\lim_{x=a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = l,$$

on considère une suite infinie de nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ appartenant à l'intervalle (p, q) et ayant a pour limite, on aura

$$\lim_{n=\infty} \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)} = l\,:$$

or, à chaque nombre x_n correspond un nombre ξ_n, compris entre x_n et a, tel que l'on ait

$$\frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{\varphi'(\xi_n)},$$

et l'on aura évidemment

$$\lim_{n=\infty} \xi_n = a, \qquad \lim_{n=\infty} \frac{f'(\xi_n)}{\varphi'(\xi_n)} = l.$$

Si, donc, le rapport $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ tend vers une limite lorsque x tend vers a, cette limite ne pourra être autre que l. Il en sera ainsi, en particulier, si les deux fonctions $f'(x)$ et $\varphi'(x)$ sont continues pour $x = a$ et si l'on a $\varphi'(a) \lesseqgtr 0$. Au surplus, cette conséquence est contenue dans le théorème direct.

Revenons maintenant à ce théorème et à la règle qui en résulte. Il peut arriver que, pour $x = a$, les termes du rapport $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ soient nuls ; dans ce cas il semble qu'on n'ait rien gagné à l'application de la règle ; toutefois le nouveau rapport peut être plus simple que l'ancien ; il peut être plus facile d'en calculer la limite. Au surplus on peut appliquer à ce rapport la même règle qu'au précédent : si, dans l'intervalle (p, q) les fonctions $f'(x)$, $\varphi'(x)$ admettent des dérivées $f''(x)$, $\varphi''(x)$, si les fonctions $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$ ne s'annulent

pas pour d'autre valeur que $x = a$, si enfin le rapport $\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ tend vers une limite l quand x tend vers a ; le rapport $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ tendra vers la même limite, et il en sera par conséquent de même du rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, etc.

D'ailleurs, si dans l'intervalle (p, q) les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ admettent des dérivées d'ordre $1, 2, .., i$ et sont, pour $x = a$, nulles ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre $i - 1$, si les fonctions $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, ..., $\varphi^{(i)}(x)$ ne s'annulent pas pour d'autre valeur que $x = a$, la suite d'égalités, obtenues par l'application répétée du théorème du n° **217**

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \frac{f'(\xi) - f'(a)}{\varphi'(\xi) - \varphi'(a)} = \frac{f''(\xi')}{\varphi''(\xi')} = \frac{f'''(\xi'')}{\varphi'''(\xi'')} = \dots = \frac{f^{(i)}[\xi^{(i-1)}]}{\varphi^{(i)}[\xi^{(i-1)}]},$$

où les nombres $\xi, \xi', \xi'', \dots, \xi^{(i-1)}$ sont compris entre x et a, met directement en évidence cette proposition : si, dans les conditions spécifiées plus haut, le rapport $\frac{f^{(i)}(x)}{\varphi^{(i)}(x)}$, tend vers une limite l, lorsque x tend vers a, le rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ tend vers la même limite.

Si l'on considère par exemple le rapport

$$\frac{x - \sin x}{x^3},$$

dont le numérateur et le dénominateur s'annulent pour $x = 0$, on voit, en appliquant la règle précédente, que, x tendant vers zéro, il doit tendre vers la même limite que les rapports successifs

$$\frac{1 - \cos x}{3x^2}, \quad \frac{\sin x}{6x}, \quad \frac{1}{6},$$

dont le dernier est évidemment la vraie valeur que l'on cherchait.

Considérons maintenant un rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ dont les deux termes deviennent infinis pour $x = a$; je ferai tendre x vers a par des valeurs moindres que a ; le raisonnement serait le même si x tendait vers a par des valeurs plus grandes que a. Je supposerai

qu'il existe un intervalle (p, a), où p est plus petit que a, à l'intérieur duquel les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ admettent des dérivées $f'(x)$, $\varphi'(x)$, et à l'intérieur duquel aucune des fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$, $f'(x)$, $\varphi'(x)$ ne s'annule. Dans ces conditions, on peut énoncer le théorème suivant.

Si, lorsque x tend vers a par des valeurs comprises entre p et a, les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ grandissent indéfiniment en valeur absolue et si le rapport $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ tend vers une limite l, le rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ tend vers la même limite.

Soient, en effet, α et x deux nombres intérieurs à l'intervalle (p, a), α étant supposé plus petit que x, l'égalité

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{\varphi(x)-\varphi(\alpha)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

où ξ est compris entre α et x, entraîne la suivante

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}\times\frac{1-\dfrac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(\alpha)}{f(x)}};$$

on peut prendre α assez voisin de a pour que les valeurs du rapport $\frac{f'(z)}{\varphi'(z)}$ soient aussi voisines qu'on voudra de l pour les valeurs de z comprises entre α et a ; ξ est une de ces valeurs ; α étant ainsi fixé, on peut prendre x assez voisin de a pour que les rapports $\frac{\varphi(\alpha)}{\varphi(x)}$, $\frac{f(\alpha)}{f(x)}$ soient aussi petits qu'on le veut, et que, par conséquent le second facteur du second membre soit aussi voisin de 1 qu'on le veut ; il en résulte qu'on peut prendre α et x assez voisins de a pour que le second membre soit aussi voisin de l qu'on le veut. Cela revient à dire que le premier membre tend vers la limite l quand x tend vers a.

On montrerait sans peine que, réciproquement, si le rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ tend vers une limite l quand x tend vers a, il existe une suite infinie de nombre ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, ..., plus petits que a et tels que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} \xi_n = a, \qquad \lim_{n=\infty} \frac{f'(\xi_n)}{\varphi'(\xi_n)} = l,$$

en sorte que si le rapport $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ a une limite pour $x = a$, cette limite ne peut être que l.

Revenons au théorème direct. Il ne semble pas, tout d'abord, qu'il y ait grand avantage à appliquer la règle qu'il exprime à la recherche de la limite d'un rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ dont les deux termes deviennent infinis pour $x = a$, puisque les termes du rapport $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ ne sont pas définis pour $x = a$, et que ces termes grandissent indéfiniment en valeur absolue quand x s'approche de a, au moins par une suite de valeurs convenablement choisies ; mais ce dernier rapport peut se présenter sous une forme plus simple, qui permette d'obtenir la limite cherchée.

Soit, par exemple, en désignant par n un nombre positif, la fraction

$$\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^m}{e^{\frac{1}{x}}}$$

dont les deux termes augmentent indéfiniment quand x tend vers 0 par valeurs positives : pour en obtenir la vraie valeur, on est amené à chercher celle de

$$\frac{-m\left(\frac{1}{x}\right)^{m-1}\frac{1}{x^2}}{-e^{\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}} = m\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{m-1}}{e^{\frac{1}{x}}};$$

on a diminué d'une unité l'exposant de $\frac{1}{x}$; en continuant de la même façon, on arrive à le rendre nul ou négatif et à s'assurer que la limite cherchée est 0.

Si c'est pour x infini qu'on a à chercher la vraie valeur de la fraction $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, il suffira d'y poser $x = \frac{1}{z}$ et de faire tendre z vers 0.

On est ainsi amené, par les règles précédentes, à chercher la limite du rapport

$$\frac{-f'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}}{-\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}} = \frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)}$$

quand z tend vers zéro; on a désigné par $f'\left(\frac{1}{z}\right)$, $\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)$ ce que deviennent les dérivées $f'(x)$, $\varphi'(x)$ quand on y remplace x par $\frac{1}{z}$. Le changement de variable est évidemment inutile et il suffira de chercher la limite du rapport $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ quand x grandit indéfiniment.

Considérons par exemple, en supposant n positif, la fraction

$$\frac{x^n}{\log x}$$

dont les deux termes sont infinis pour $x = +\infty$; le rapport des dérivées de ces deux termes est nx^n, ce rapport grandit infiniment quand x augmente indéfiniment par valeurs positives; il en est de même de la fraction proposée.

236. — On peut rapprocher des règles précédentes, connues sous le nom de règles de l'Hospital, la remarque suivante, que l'on doit à M. Appell.

Considérons deux séries entières

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots,$$
$$b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n + \dots,$$

dans lesquelles les coefficients a_n, b_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) soient tous positifs; je suppose que, pour le nombre positif $x = A$, les séries précédentes soient divergentes, mais qu'elles convergent pourvu que x soit positif et plus petit que A; je ne considérerai, dans ce qui suit que de telles valeurs de la variable x. Il est, tout d'abord, bien aisé de voir que, si x tend vers A par valeurs plus petites que A, la somme de l'une ou l'autre série augmente indéfiniment; en effet, puisque la série à termes positifs

$$a_0 + a_1A + \dots + a_nA^n + \dots$$

est divergente, on peut prendre n assez grand pour que la somme de ses n premiers termes dépasse tel nombre positif P que l'on voudra, puis x assez voisin de A pour que la valeur du polynome $a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$ soit aussi voisine qu'on voudra de

celle qu'il prend quand on y remplace x par A, et soit, par conséquent, au moins égale à P. Il en sera de même, *a fortiori*, de la somme de la série, pour cette valeur de x et pour les valeurs plus grandes.

Ceci posé, désignons par $f(x)$ et $g(x)$ les sommes respectives des deux séries proposées, par $f_n(x)$, $g_n(x)$ les sommes de leurs n premiers termes, par $F_n(x)$, $G_n(x)$ les restes correspondants, la proposition que j'ai en vue est la suivante.

Si l'on a

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n} = l,$$

on aura aussi

$$(2) \qquad \lim_{x=A} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Sous le bénéfice de la supposition (1), on peut faire correspondre au nombre positif ε, si petit qu'il soit, un nombre positif p tel que, sous la condition $n > p$, le rapport $\frac{a_n}{b_n}$ soit compris entre $l - \varepsilon$ et $l + \varepsilon$; il en sera de même des rapports.

$$\frac{a_n x^n}{b_n x^n}, \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{b_{n+1} x^{n+1}}, \dots, \frac{a_{n+m} x^{n+m}}{b_{n+m} x^{n+m}},$$

$$\frac{a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots + a_{n+m} x^{n+m}}{b_n x^n + b_{n+1} x^{n+1} + \dots + b_{n+m} x^{n+m}}.$$

On voit donc, en choisissant pour n un nombre supérieur à p et en faisant grandir m indéfiniment, que l'on a

$$l - \varepsilon \leqq \frac{F_n(x)}{G_n(x)} \leqq l + \varepsilon;$$

n étant ainsi fixé, je vais supposer que x tende vers A.

Puisque les séries

$$a_n A^n + a_{n+1} A^{n+1} + \dots,$$

$$b_n A^n + b_{n+1} A^{n+1} + \dots$$

sont divergentes, il résulte d'une remarque antérieure que $F_n(x)$

et $G_n(x)$ augmentent indéfiniment, comme $f(x)$ et $g(x)$, quand x se rapproche indéfiniment de A. On a d'ailleurs

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_n(x) + F_n(x)}{g_n(x) + G_n(x)} = \frac{F_n(x)}{G_n(x)} \frac{1 + \frac{f_n(x)}{F_n(x)}}{1 + \frac{g_n(x)}{G_n(x)}};$$

lorsque x s'approche de A, les polynomes $f_n(x)$, $g_n(x)$ restent inférieurs à $f_n(A)$, $g_n(A)$, les quantités $F_n(x)$, $G_n(x)$ grandissant indéfiniment ; on voit de suite que, dans le dernier membre, le second facteur tend vers 1 ; le premier facteur reste compris entre $l - \varepsilon$, $l + \varepsilon$; le produit finit donc par rester lui-même compris entre deux nombres qui sont, l'un plus petit que $l - \varepsilon$, l'autre plus grand que $l + \varepsilon$, mais aussi voisins que l'on voudra de $l - \varepsilon$, $l + \varepsilon$: comme ε peut être pris aussi petit qu'on le veut, on voit que le rapport $\frac{f(x)}{g(x)}$ sera aussi voisin qu'on le voudra de l, pourvu que x soit assez voisin de A.

La proposition énoncée et la démonstration subsiste quand on a $l = 0$; si l'on avait $\lim. \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, on voit de suite, en renversant les rapports, que l'on aurait alors

$$\lim_{x=A} \frac{g_n(x)}{f_n(x)} = 0, \qquad \lim_{x=A} \frac{f_n(x)}{g_n(x)} = +\infty.$$

Une proposition analogue concerne les deux séries

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots,$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + \dots,$$

dans lesquelles les coefficients sont toujours positifs, mais que je suppose maintenant convergentes quelque soit x, en sorte que $f(x)$, $g(x)$ sont des fonctions entières.

Si l'on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{a_n}{b_n} = l,$$

on aura aussi

$$\lim_{x=+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

La démonstration est la même, si ce n'est qu'on a à faire intervenir la remarque suivante ; n étant fixe, le rapport

$$\frac{f_n(x)}{F_n(x)},$$

où $f_n(x)$ désigne la somme des n premiers termes et $F_n(x)$ le reste correspondant d'une série entière, à coefficients positifs, toujours convergente, tend vers o quand x augmente indéfiniment par valeurs positives.

Dans les deux propositions, on a supposé que tous les coefficients des deux séries étaient positifs ; on aperçoit de suite qu'il n'y a aucun inconvénient à ce que certains coefficients soient nuls dans l'une des séries, pourvu que les coefficients correspondants de l'autre série soient nuls aussi ; naturellement on n'aura pas à considérer les rapports $\frac{a_n}{b_n}$ pour lesquels a_n et b_n sont nuls. Enfin, on voit aussi aisément qu'il pourrait y avoir au commencement des deux séries des termes nuls ou négatifs, mais en *nombre fini* ; les deux propositions subsisteraient.

Considérons, par exemple, une série

$$\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots,$$

dans laquelle je suppose seulement que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} \alpha_n = l.$$

l étant un nombre positif ; il ne peut y avoir au commencement de la série qu'un nombre fini de termes nuls ou négatifs ; pour $x = 1$, la série est divergente, puisque l n'est pas nul ; pour x positif et plus petit que 1, elle est convergente, puisque la limite du rapport d'un terme au précédent, dont le rang augmente indéfiniment, est x. Si on compare cette série à la série

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + \ldots,$$

on voit que l'on a

$$\lim_{x=1} (x-1)\varphi(x) = l,$$

en supposant que x tende vers 1 par valeurs plus petites que 1.

IV. — EXEMPLE D'UNE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE

237. — La fonction de x définie par la série

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} b^n \cos \pi a^n x,$$

où a et b sont des nombres positifs dont le premier est un entier impair et le second est plus petit que 1, et qui vérifient en outre une inégalité que l'on introduira plus tard, fournit, comme Weierstrass l'a montré, un exemple simple de fonction continue sans dérivée.

Je désignerai dans la suite par $S_n(x)$ la somme des n premiers termes de cette série et par $R_n(x)$ son reste. La série $\sum b^n$, qui a ses termes positifs, étant convergente et les termes de cette série étant supérieurs ou égaux, en valeur absolue, à ceux de la série (1), cette dernière est absolument et uniformément convergente ; elle représente une fonction continue dans tout intervalle. Cette fonction étant évidemment paire, il suffit, pour l'étudier, de considérer les valeurs de x qui ne sont pas négatives.

J'aurai affaire, dans ce qui suit, aux valeurs de la dérivée $S'_n(x)$ de $S_n(x)$: cette dérivée est égale au produit par π de

$$-\pi \sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} a^\nu b^\nu \sin \pi a^\nu x\,;$$

sa valeur absolue est au plus égale à

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=n-1} a^\nu b^\nu = \frac{a^n b^n - 1}{ab - 1}.$$

Le reste $R_n(x)$ est compris entre les deux bornes

$$-\frac{b^n}{1-b}, \qquad +\frac{b^n}{1-b}.$$

qu'il peut d'ailleurs atteindre : il atteint la première pour les valeurs de x qui sont de la forme $\frac{2p+1}{a^n}$, la seconde pour celles qui sont de la forme $\frac{2p}{a^n}$, en désignant par p un nombre entier ; en effet, si $a^n x$ est un nombre entier, il en est de même de $a^{n-1} x$, $a^{n-2} x$, ... etc ; tous ces nombres entiers sont de même parité que $a^n x$.

Quoique cela n'intervienne pas dans la démonstration qui va suivre, il convient d'observer que $R^n(x)$ est nul pour les valeurs de x qui sont de la forme $\frac{2p+1}{2a^n}$.

On peut dire encore que si l'on écrit x dans le système de numération dont la base est a, la série $f(x)$ s'évalue sous forme finie pour toutes les valeurs de x dont la représentation analogue a la représentation décimale (n° **11**), comporte une mantisse dont le nombre de chiffres est limité : si ce nombre de chiffres est n, la fonction $f(x)$ est égale à $S_n(x) \pm \frac{b^n}{1-b}$, suivant que le nombre entier $a^n x$ est pair ou impair. On observera en passant que les nombres x pour lesquels la mantisse est limitée, et pour lesquels le nombre entier $a^n x$ est pair ou impair, forment deux ensembles dont chacun est dense dans tout intervalle [1].

Ces remarques suffisent à reconnaître presque immédiatement que la fonction $f(x)$ ne peut avoir de dérivée, au sens du n° **204**, pour la valeur x_0 de x, d'ailleurs quelconque, en supposant $ab > 1 + \frac{\pi}{2}$.

Si l'on désigne en effet par $\alpha = \frac{r}{a^n}$, $\alpha' = \frac{r+1}{a^n}$ les valeurs approchées de x_0, à $\frac{1}{a^n}$ près, par défaut et par excès, on aura

$$\frac{f(\alpha')-f(\alpha)}{\alpha'-\alpha} = \frac{S_n(\alpha')-S_n(\alpha)}{\alpha'-\alpha} \pm 2\,\frac{a^n b^n}{1-b},$$

(1) M. F. Klein, dans un cours professé à Gœttingue dans le semestre d'été de 1901, auquel je me permets de renvoyer le lecteur, a fait une étude très intéressante, au point de vue de la représentation graphique, de la fonction $y = f(x)$ et des courbes qui la représentent approximativement [$y = S_n(x)$] : j'ai d'ailleurs profité sur quelques points de la forme qu'il a donnée à la démonstration de Weierstrass.

en prenant le signe + ou le signe — suivant que r est impair ou pair. Or, le premier terme du second membre est au plus égal, en valeur absolue, à $\pi\frac{a^n b^n - 1}{ab - 1}$ (n° **217**) : ce second membre, en valeur absolue, sera donc supérieur ou égal à

$$\frac{2a^n b^n}{1 - b} - \pi\frac{a^n b^n - 1}{ab - 1} > \frac{a^n b^n(2ab - 2 - \pi)}{ab - 1};$$

en d'autres termes si l'on désigne par λ le nombre positif par hypothèse,

$$\frac{2ab - 2 - \pi}{ab - 1},$$

on aura

$$\left|\frac{f(\alpha') - f(\alpha)}{\alpha' - \alpha}\right| > \lambda\, a^n b^n;$$

quand n augmente indéfiniment le second membre augmente indéfiniment; or cela est incompatible avec l'existence d'une dérivée pour $x = x_0$, puisque les nombres α, α', qui *comprennent toujours* x_0, s'en rapprochent indéfiniment.

Mais on peut aller plus loin et, en modifiant un peu la condition d'inégalité imposée à a, b, montrer que la fonction $f(x)$ n'admet, pour $x = x_0$, ni dérivée à droite, ni dérivée à gauche et qu'elle n'est, pour cette valeur de x, ni croissante, ni décroissante.

Désignons, en effet par $\frac{s}{a^n}$ celui des deux nombres α, α' qui s'approche le plus de x_0 en sorte que sa différence avec x_0 soit au plus égale, en valeur absolue, à $\frac{1}{2a^n}$, et que le nombre

$$\cos\pi a^n x_0 = (-1)^s \cos\pi(a^n x_0 - s)$$

soit du signe de $(-1)^s$, puisque $a^n x_0 - s$ est au plus égal à $\frac{1}{2}$, en valeur absolue.

Soient en outre

$$x' = \frac{s - 1}{a^n}, \qquad x'' = \frac{s + 1}{a^n};$$

x_0 est compris entre ces deux nombres et comme sa différence

avec leur demi-somme est au plus égale à $\frac{1}{2a^n}$, les différences positives $x'' - x_0$, $x_0 - x'$ sont au plus égales à $\frac{3}{2a^n}$, au moins égales à $\frac{1}{2a^n}$.

On a d'ailleurs.

$$\frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0} = \frac{S_n(x'') - S_n(x_0)}{x'' - x_0} + \frac{R_n(x'') - R_n(x_0)}{x'' - x_0},$$
$$\frac{f(x_0) - f(x')}{x_0 - x'} = \frac{S_n(x_0) - S_n(x')}{x_0 - x'} + \frac{R_n(x_0) - R_n(x')}{x_0 - x'}.$$

Les deux fractions

$$\frac{S_n(x'') - S_n(x_0)}{x'' - x_0}, \qquad \frac{S_n(x_0) - S_n(x')}{x_0 - x'}$$

sont au plus égales, en valeur absolue, à $\pi \frac{a^n b^n - 1}{ab - 1}$.

On a, d'un autre côté

$$R_n(x') = R_n(x'') = -(-1)^s b^n (1 + b + b^2 + \ldots);$$
$$R_n(x_0) = (-1)^s b^n [(-1)^s \cos \pi a^n x_0 + (-1)^s b \cos \pi a^{n+1} x_0 + \ldots].$$

Il en résulte que la différence $R^n(x'') - R_n(x_0)$ est égale au produit de $-(-1)^s b^n$ par la somme de la série

$$1 + (-1)^s \cos \pi a^n x_0 + b [1 + (-1)^s \cos \pi a^{n+1} x_0] + \ldots;$$

les coefficients de b, b^2, ... sont positifs ou nuls ; il en est de même, comme on l'a déjà fait observer, de $(-1)^s \cos \pi a^n x_0$; la somme de la série est donc supérieure ou égale à 1 et, puisque $x'' - x_0$ est au plus égal à $\frac{3}{2a^n}$, on peut écrire

$$\frac{R_n(x'') - R_n(x_0)}{x'' - x_0} = -(-1)^s \frac{2}{3} A'' a^n b^n,$$

A'' étant un nombre au moins égal à 1. On trouvera de même, en désignant encore par A' un nombre au moins égal à 1

$$\frac{R_n(x_0) - R_n(x')}{x_0 - x'} = (-1)^s \frac{2}{3} A' a^n b^n.$$

On conclut de là que les valeurs absolues de

$$\frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0} = \frac{S_n(x'') - S_n(x_0)}{x'' - x_0} + \frac{R_n(x'') - R_n(x_0)}{x'' - x_0},$$

$$\frac{f(x_0) - f(x')}{x_0 - x'} = \frac{S_n(x_0) - S_n(x')}{x_0 - x'} + \frac{R_n(x_0) - R_n(x')}{x_0 - x'}$$

sont au moins égales à

$$-\pi\frac{a^n b^n - 1}{ab - 1} + \frac{2}{3}a^n b^n > \frac{\frac{2}{3}(ab - 1) - \pi}{ab - 1}a^n b^n;$$

le dernier membre est positif si, comme je le suppose maintenant, on a

$$ab > 1 + \frac{3\pi}{2}.$$

Sous les mêmes conditions, il est clair que, dans les expressions de

$$\frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0}, \qquad \frac{f(x_0) - f(x')}{x_0 - x'},$$

c'est les seconds termes qui, étant les plus grands en valeur absolue, donnent leurs signes aux seconds membres, en sorte que si l'on désigne par λ'', λ' des nombres plus grands que

$$\frac{\frac{2}{3}(ab - 1) - \pi}{ab - 1},$$

on peut écrire

$$\frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0} = -(-1)^{\alpha}\lambda'' a^n b^n,$$

$$\frac{f(x_0) - f(x')}{x_0 - x'} = (-1)^{\alpha}\lambda' a^n b^n.$$

Ces conclusions sont incompatibles avec l'existence d'une dérivée soit à droite, soit à gauche, puisque, lorsque n grandit indéfiniment, que x'' et x' se rapprochent indéfiniment de x_0, les quantités $\lambda'' a^n b^n$, $\lambda' a^n b^n$ augmentent indéfiniment. Enfin, les deux rapports

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0}, \qquad \frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0}$$

étant constamment de signes contraires, quelque grand que soit n, la fonction $f(x)$ ne peut être ni croissante, ni décroissante pour $x = x_0$.

TABLE DES MATIÈRES DU TOME I

CHAPITRE PREMIER

NOMBRES IRRATIONNELS

CHAPITRE II

ENSEMBLES INFINIS. SUITES INFINIES. LIMITES

CHAPITRE III

SÉRIES. PRODUITS INFINIS, ETC.

CHAPITRE IV

—

PREMIERS PRINCIPES DE LA THÉORIE DES FONCTIONS.
POLYNOMES, FRACTIONS RATIONNELLES, FONCTION EXPONENTIELLE, ETC.

CHAPITRE V

—

SUITES INFINIES A TERMES VARIABLES. CONVERGENCE UNIFORME.
DÉFINITION DES FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

CHAPITRE VI

—

DÉRIVÉES

